



**DISERTASI SS143507**

# **GEOGRAPHICALLY WEIGHTED MULTIVARIATE POISSON REGRESSION**

**(Studi Kasus : Pemodelan Jumlah Kematian Ibu, Neonatal Dini,  
dan Neonatal Lanjut di Provinsi Jawa Tengah)**

**Oleh :  
Triyanto  
NRP. 1312301004**

**Promotor :  
Dr. Purhadi, M.Sc.**

**Co-Promotor :  
Dr. Bambang Widjanarko Otok, M.Si.  
Santi Wulan Purnami, M.Si., Ph.D.**

**PROGRAM DOKTOR  
JURUSAN STATISTIKA  
FAKULTAS MATEMATIKA DAN ILMU PENGETAHUAN ALAM  
INSTITUT TEKNOLOGI SEPULUH NOPEMBER  
SURABAYA  
2017**



## LEMBAR PENGESAHAN

Disertasi disusun untuk memenuhi salah satu syarat memperoleh  
gelar Doktor (Dr.)

di  
Program Doktor Jurusan Statistika  
Institut Teknologi Sepuluh Nopember

Oleh :  
Triyanto  
NRP. 1312301004

Tanggal Ujian : 13 Januari 2017  
Periode Wisuda : Maret 2017

Disetujui oleh :

1. Dr. Purnadi, M.Sc.  
NIP. 19620204 198701 1 001

(Promotor)

2. Dr. Bambang Widjanarko Otok, M.Si.  
NIP. 19681124 199412 1 001

(Co-Promotor)

3. Santi Wulan Purnami, M.Si., Ph.D.  
NIP. 19720923 199803 2 001

(Co-Promotor)

4. Dr. Hizir Sofyan  
NIP. 19680531 199303 1 003

(Penguji  
Eksternal)

5. Prof. Drs. Nur Iriawan, M.Ikom., Ph.D.  
NIP. 19621015 198803 1 002

(Penguji)

6. Dr. Agus Suharsono, M.S.  
NIP. 19580823 198403 1 003

(Penguji)

7. Dr. Sutikno, M.Si.  
NIP. 19710313 199702 1 001

(Penguji)

an. Direktur Program Pascasarjana  
Asisten Direktur

Direktur Program Pascasarjana

Prof. Dr. Ir. Tri Widjaja, M.Eng.  
NIP. 19611021 198603 1 001

Prof. Ir. Djauhar Manfaat, M.Sc., Ph.D.  
NIP. 19601202 198701 1 001





## **PERNYATAAN**

Dengan ini saya menyatakan bahwa dalam disertasi ini tidak terdapat karya yang pernah diajukan untuk memperoleh gelar Doktor di suatu perguruan tinggi manapun. Sepanjang pengetahuan saya tidak terdapat karya atau pendapat yang pernah ditulis atau diterbitkan oleh orang lain, kecuali yang secara tertulis diacu dalam naskah dan disebutkan dalam daftar pustaka.

Surabaya, Januari 2017

Yang menyatakan



Triyanto





*Aku persembahkan karya sederhana ini untuk  
Istri tercinta Niken Eri Winarti  
Serta kedua anakku tersayang  
Khansa Zaizafun Faiha dan  
Jaffan Arya Wirasena*



## ***GEOGRAPHICALLY WEIGHTED MULTIVARIATE POISSON REGRESSION***

### **Studi Kasus : Pemodelan Jumlah Kematian Ibu, Neonatal Dini, dan Neonatal Lanjut di Provinsi Jawa Tengah**

Nama Mahasiswa : Triyanto  
NRP : 1312301004  
Promotor : Dr. Purhadi, M.Sc  
Co-Promotor : 1. Dr. Bambang Widjanarko Otok, M.Si.  
2. Santi Wulan Purnami, M.Si., Ph.D.

### **ABSTRAK**

Tujuan penelitian ini adalah mengembangkan model *multivariate Poisson regression* (MPR) dan *geographically weighted multivariate Poisson regression* (GWMPR), yang mencakup estimasi parameter dan pengujian hipotesis. Pengembangan model dilakukan untuk kovariansi merupakan konstanta dan kovariansi merupakan fungsi variabel bebas. Selanjutnya, model MPR dan GWMPR yang telah dikembangkan diterapkan untuk pemodelan jumlah kematian ibu, neonatal dini, dan neonatal lanjut di Provinsi Jawa Tengah. Hasil penelitian ini, estimasi parameter dilakukan dengan metode *maximum likelihood estimation* (MLE). Permasalahan dalam estimasi parameter dari model ini, metode MLE tidak dapat menemukan penyelesaian analitis, sehingga diterapkan prosedur iterasi dengan algoritma *Newton-Raphson*. Pengujian hipotesis dalam model MPR dan GWMPR yang meliputi : uji kesamaan model GWMPR dan MPR, uji parameter serentak, dan uji parameter parsial dilakukan dengan metode *likelihood ratio test* (LRT). Hasil studi empiris menunjukkan ada perbedaan antara model GWMPR dan MPR. Memperhatikan nilai AIC dan MSE, model GWMPR lebih baik daripada model MPR dalam pemodelan jumlah kematian ibu, neonatal dini, dan neonatal lanjut. Sementara itu, model dengan kovariansi merupakan fungsi variabel bebas lebih baik daripada model dengan kovariansi merupakan konstanta.

Kata Kunci : *geographically weighted, multivariate Poisson regression*, data spasial, kematian ibu, neonatal dini, neonatal lanjut.





## **GEOGRAPHICALLY WEIGHTED MULTIVARIATE POISSON REGRESSION**

### **Case Study : Modelling The Number of Mortality of Maternal, Early Neonatal, and Late Neonatal in Central Java Province**

Name of Student : Triyanto  
Identity Number : 1312301004  
Promotor : Dr. Purhadi, M.Sc  
Co-Promotor : 1. Dr. Bambang Widjanarko Otok, M.Si.  
2. Santi Wulan Purnami, M.Si., Ph.D.

### **ABSTRACT**

The aim of this study is to develop a model of multivariate Poisson regression (MPR) and geographically weighted multivariate Poisson regression (GWMPR) which include parameter estimation and hypothesis testing. Development of the models are done for a constant covariance and covariance as a function of the independent variables. Furthermore, the MPR and GWMPR models that have been developed will be applied to modelling the number of mortality of maternal, early neonatal, and late neonatal in Central Java Province. The results of this study, the parameters estimation of the MPR and GWMPR models are done by using maximum likelihood estimation (MLE) method. The problem of parameters estimation for these models, MLE method can not find an analytical solution, so it is applied iterative procedure by the Newton-Raphson algorithm. The hypothesis testing in GWMPR model which include a goodness of fit test, an overall test, and test of individual parameters are done by using Likelihood Ratio Test (LRT) method. The results of empirical studies show the difference between the models of GWMPR and MPR. Considering the value of AIC and MSE, the model of GWMPR is better than the MPR model to modelling of the number of mortality of maternal, early neonatal, and late neonatal. Meanwhile, the model with the covariance as a function of the independent variable is better than a model with a constant covariance.

Key words : geographically weighted, multivariate Poisson regression,  
spatial data, maternal mortality, early neonatal, late neonatal.





## KATA PENGANTAR

Penulis mengucapkan puji syukur kehadirat Allah SWT, karena hanya atas rahmat, taufik dan hidayah-Nyalah, sehingga disertasi dengan judul “*Geographically Weighted Multivariate Poisson Regression* (Studi Kasus : Pemodelan Jumlah Kematian Ibu, Neonatal Dini dan Neonatal Lanjut di Provinsi Jawa Tengah)” dapat diselesaikan sesuai dengan rencana.

Dalam menyusun disertasi ini, penulis tidak sedikit mengalami kesulitan dan hambatan berkaitan dengan hal-hal baru yang ditemukan. Akan tetapi berkat bantuan dan bimbingan dari berbagai pihak, penulis dapat menyelesaikannya. Oleh karena itu, pada kesempatan ini, penulis mengucapkan terima kasih kepada yang terhormat :

1. Prof. Ir. Djauhar Manfaat, M.Sc., Ph.D, selaku Direktur Program Pascasarjana ITS Surabaya yang telah memberikan kesempatan kepada saya untuk menimba ilmu di Program Doktor Statistika ITS Surabaya.
2. Direktorat Jenderal Sumberdaya Iptek dan Dikti, Kementerian Riset, Teknologi, dan Pendidikan Tinggi yang telah memberikan beasiswa (BPPS) kepada penulis.
3. Dr. Suhartono, M.Sc., selaku Ketua Jurusan Statistika FMIPA ITS Surabaya, yang telah memberikan izin, bantuan dan dukungan fasilitas untuk kelancaran penulisan disertasi ini.
4. Dr. rer. Pol. Heri Kuswanto, M.Si., selaku Ketua Program Studi Statistika Program Pascasarjana ITS Surabaya, yang telah memberikan izin, bantuan dan dukungan fasilitas untuk kelancaran penulisan disertasi ini.
5. Dr. Purhadi, M.Sc., sebagai Promotor yang telah memberikan motivasi, bimbingan, saran, dan kemudahan yang sangat membantu dalam penulisan disertasi ini.
6. Dr. Bambang Widjanarko Otok, M.Si. dan Santi Wulan Purnami, M.Si., Ph.D., sebagai Co-Promotor yang telah memberikan motivasi, bimbingan, saran, dan kemudahan yang sangat membantu dalam penulisan disertasi ini.

7. Prof. Drs. Nur Iriawan, M.Ikom., Ph.D., Dr. Agus Suharsono, MS., dan Dr. Sutikno, M.Si. sebagai tim penilai disertasi yang telah memberikan saran dan masukan dalam perbaikan penulisan disertasi ini.
8. Dr. Hizir Sofyan, M.Sc. sebagai penguji eksternal dari Universitas Syiah Kuala Banda Aceh yang telah memberikan saran dan masukan dalam penulisan disertasi ini.
9. Dr. Irhamah, M.Si. dan Dr. R. Muhamad Atok, M.Si., sebagai tim validasi yang telah memberikan masukan dan saran dalam perbaikan penulisan disertasi ini.
10. Dr. Ir. Setiawan, M.S., sebagai dosen wali yang telah memberikan bimbingan kepada penulis selama menempuh studi di ITS Surabaya.
11. Keluarga besar dosen, staf tata usaha dan karyawan Jurusan Statistika FMIPA ITS Surabaya yang telah memberikan bekal ilmu dan bantuan kepada penulis sehingga sangat membantu dalam penulisan disertasi ini.
12. Keluarga besar dosen Progam Studi Pendidikan Matematika, FKIP, Universitas Sebelas Maret, yang telah memberikan dukungan semangat kepada penulis.
13. Kedua orang tua saya Almarhum Bapak Nardi Winoto dan Almarhumah Ibu Sudarti, serta kedua mertua saya Bapak Suparlan dan Ibu Siti Aisyah, atas doa yang selalu terucap untuk anaknya.
14. Rekan-rekan mahasiswa Program Doktor Statistika ITS Surabaya, yang selalu memberikan dorongan dan bantuan pemikiran dalam penulisan disertasi ini.

Akhirnya penulis berharap mudah-mudahan penulisan disertasi ini dapat digunakan sebagai pijakan awal dalam upaya memajukan ilmu pengetahuan. Meskipun demikian, karena keterbatasan penulis dalam menyusun penulisan disertasi ini, maka demi kesempurnaannya segala saran dan kritik yang membangun dari semua pihak sangat penulis harapkan.

Surabaya, Januari 2017

Triyanto

## DAFTAR ISI

	Hal
<b>HALAMAN JUDUL</b> .....	i
<b>HALAMAN PENGESAHAN</b> .....	iii
<b>HALAMAN PERNYATAAN</b> .....	v
<b>HALAMAN PERSEMBAHAN</b> .....	vii
<b>ABSTRAK</b> .....	ix
<b>ABSTRACT</b> .....	xi
<b>KATA PENGANTAR</b> .....	xiii
<b>DAFTAR ISI</b> .....	xv
<b>DAFTAR TABEL</b> .....	xix
<b>DAFTAR GAMBAR</b> .....	xxi
<b>DAFTAR LAMPIRAN</b> .....	xxiii
<b>DAFTAR NOTASI</b> .....	xv
 <b>BAB I PENDAHULUAN</b> .....	 1
1.1 Latar Belakang Masalah .....	1
1.2 Rumusan Masalah .....	6
1.3 Tujuan Penelitian .....	7
1.4 Manfaat dan Orisinialitas Penelitian .....	8
1.5 Batasan Masalah .....	10
1.6 Sistematika Penulisan .....	10
 <b>BAB II LANDASAN TEORI</b> .....	 11
2.1 Distribusi Poisson .....	11
2.1.1 Distribusi Poisson Univariat .....	12
2.1.2 Distribusi Poisson Multivariat .....	12
2.2 Regresi Poisson Univariat .....	14
2.2.1 Estimasi Parameter .....	15
2.2.2 Pengujian Hipotesis .....	16
2.3 Data Spasial .....	19



2.4	<i>Geographically Weighted Poisson Regression</i> .....	20
2.4.1	Estimasi Parameter .....	20
2.4.2	Pengujian Hipotesis .....	23
2.4.3	Penentuan Pembobot Optimum .....	27
2.5	Multikolinearitas .....	30
2.6	Pemilihan Model Regresi “Terbaik” .....	31
2.7	Asimtotik Normalitas dari <i>Maximum Likelihood Estimator</i> ...	32
2.8	Kematian Ibu dan Bayi .....	34
2.8.1	Kematian Ibu .....	35
2.8.2	Kematian Bayi .....	38
2.9	Kerangka Konseptual Determinan Kematian Ibu, Neonatal Dini, dan Neonatal Lanjut .....	40
<b>BAB III</b>	<b>METODE PENELITIAN</b> .....	41
3.1	Penelitian Teoritis .....	41
3.1.1	Estimasi Parameter Model MPR .....	42
3.1.2	Estimasi Parameter Model GWMPR .....	43
3.1.3	Uji Hipotesis Model MPR .....	45
3.1.4	Uji Hipotesis Model GWMPR .....	47
3.2	Penelitian Aplikatif .....	50
3.2.1	Sumber Data .....	50
3.2.2	Profil Administrasi Provinsi Jawa Tengah .....	51
3.2.3	Variabel Penelitian .....	52
3.2.4	Hubungan antara Variabel-variabel Penelitian dalam Model .....	55
3.2.5	Tahap Analisis data .....	55
<b>BAB IV</b>	<b>MULTIVARIATE POISSON REGRESSION</b> .....	57
4.1	Model <i>Multivariate Poisson Regression</i> .....	57
4.1.1	Estimasi Parameter Model MPR dengan Kovariansi Merupakan Konstanta .....	58

4.1.2 Estimasi Parameter Model MPR dengan Kovariansi	
Merupakan Fungsi Variabel Bebas .....	62
4.2 Pengujian Hipotesis Model MPR .....	65
4.2.1 Pengujian Hipotesis Model MPR dengan Kovariansi	
Merupakan Konstanta .....	66
4.2.2 Pengujian Hipotesis Model MPR dengan Kovariansi	
Merupakan Fungsi Variabel Bebas .....	76
<b>BAB V GEOGRAPHICALLY WEIGHTED MULTIVARIATE</b>	
<b>POISSON REGRESSION .....</b>	<b>85</b>
5.1 Model GWMPR .....	85
5.1.1 Estimasi Parameter Model GWMPR dengan	
Kovariansi Merupakan Konstanta .....	86
5.1.2 Estimasi Parameter Model GWMPR dengan	
Kovariansi Merupakan Fungsi Variabel Bebas .....	91
5.2 Pengujian Hipotesis Model GWMPR .....	95
5.2.1 Pengujian Hipotesis Model GWMPR dengan	
Kovariansi Merupakan Konstanta .....	95
5.2.2 Pengujian Hipotesis Model GWMPR dengan	
Kovariansi Merupakan Fungsi Variabel Bebas .....	107
<b>BAB VI PENERAPAN MODEL MPR DAN GWMPR PADA</b>	
<b>DATA KEMATIAN IBU, NEONATAL DINI, DAN</b>	
<b>NEONATAL LANJUT .....</b>	<b>119</b>
6.1 Deskripsi Data Penelitian .....	119
6.2 Pemodelan Jumlah Kematian Ibu, Neonatal Dini dan	
Neonatal Lanjut dengan Model RPM .....	123
6.2.1 Model dengan Kovariansi Merupakan Konstanta .....	124
6.2.2 Model dengan Kovariansi Merupakan Fungsi	
Variabel Bebas .....	128
6.3 Pemodelan Jumlah Kematian Ibu, Neonatal Dini dan	
Neonatal Lanjut dengan Model GWMPR .....	133

6.3.1 Model dengan Kovariansi Merupakan Konstanta .....	134
6.3.2 Model dengan Kovariansi Merupakan Fungsi Variabel Bebas .....	139
6.4 Perbandingan Model RPM dan GWMPR .....	144
6.5 Interpretasi Hasil .....	146
<b>BAB VII KESIMPULAN DAN SARAN</b> .....	149
7.1 Kesimpulan .....	149
7.2 Saran .....	151
<b>DAFTAR PUSTAKA</b> .....	153
<b>LAMPIRAN</b> .....	157

## DAFTAR TABEL

	<b>Hal</b>
Tabel 3.1 : Definisi Operasional dari Variabel Respon .....	53
Tabel 3.2 : Definisi Operasional dari Variabel Bebas .....	53
Tabel 6.1 : Nilai Minimum, Maksimum, Rata-rata, dan Standar Deviasi dari Variabel Penelitian .....	120
Tabel 6.2 : Nilai Statistik Uji Distribusi Poisson Trivariat dari Variabel Respon .....	121
Tabel 6.3 : Nilai Korelasi Antar Respon .....	122
Tabel 6.4 : Nilai Korelasi Antar Variabel Bebas .....	122
Tabel 6.5 : Nilai <i>Variance Inflation Factors</i> .....	123
Tabel 6.6 : Estimasi Parameter dan Nilai Statistik Uji Parsial Model 1 ....	124
Tabel 6.7 : Estimasi Parameter dan Nilai Statistik Uji Parsial untuk Kovariansi Model 1 .....	124
Tabel 6.8 : Nilai AIC Tiga Terkecil untuk Kombinasi Variabel Bebas Model 1 .....	126
Tabel 6.9 : Estimasi Parameter dan Nilai Statistik Uji Parsial Model 1 ”terbaik” .....	127
Tabel 6.10 : Estimasi Parameter dan Nilai Statistik Uji Parsial untuk Kovariansi Model 1”Terbaik” .....	127
Tabel 6.11 : Estimasi Parameter dan Nilai Statistik Uji Parsial Model 2 .....	129
Tabel 6.12 : Estimasi Parameter dan Nilai Statistik Uji Parsial untuk Kovariansi Model 2 .....	129
Tabel 6.13 : Nilai AIC Tiga Terkecil untuk Kombinasi Variabel Bebas Model 2 .....	131
Tabel 6.14 : Estimasi Parameter dan Nilai Statistik Uji Parsial Model 2 ”terbaik” .....	132
Tabel 6.15 : Estimasi Parameter dan Nilai Statistik Uji Parsial untuk Kovariansi Model 2 ”Terbaik” .....	132

Tabel 6.16	: Estimasi Parameter dan Nilai Statistik Uji Parsial Model 3 Kabupaten Banyumas .....	135
Tabel 6.17	: Estimasi Parameter dan Nilai Statistik Uji Parsial Model 3 Kabupaten Sragen .....	135
Tabel 6.18	: Estimasi Parameter dan Nilai Statistik Uji Parsial untuk Kovariansi Model 3 .....	136
Tabel 6.19	: Estimasi Parameter dan Nilai Statistik Uji Parsial Model 4 Kabupaten Banyumas .....	140
Tabel 6.20	: Estimasi Parameter dan Nilai Statistik Uji Parsial untuk Kovariansi Model 4 di Kabupaten Banyumas .....	141
Tabel 6.21	: Estimasi Parameter dan Nilai Statistik Uji Parsial Model 4 Kabupaten Sragen .....	141
Tabel 6.22	: Estimasi Parameter dan Nilai Statistik Uji Parsial untuk Kovariansi Model 4 di Kabupaten Sragen .....	141
Tabel 6.23	: Nilai MSE dan AIC dari Model MPR dan GWMPR .....	146

## DAFTAR GAMBAR

	Hal
Gambar 1.1 : Peta Posisi Kegiatan Penelitian .....	9
Gambar 1.2 : Sistematika Penulisan .....	10
Gambar 2.1 : Hubungan <i>Bandwidth</i> dengan Pembobot .....	28
Gambar 2.2 : <i>Fixed Bandwidth</i> .....	28
Gambar 2.3 : <i>Adaptive Bandwidth</i> .....	29
Gambar 2.4 : Kerangka Teoritis Determinan Kematian Ibu .....	38
Gambar 2.5 : Kerangka Konseptual Determinan Kematian Ibu, Neonatal Dini, dan Neonatal Lanjut .....	40
Gambar 3.1 : Peta Administrasi Provinsi Jawa Tengah .....	52
Gambar 6.1 : Variabel Bebas yang Berpengaruh Signifikan Terhadap Jumlah Kematian Ibu pada Model 3 .....	138
Gambar 6.2 : Variabel Bebas yang Berpengaruh Signifikan Terhadap Jumlah Kematian Neonatal Dini pada Model 3 .....	138
Gambar 6.3 : Variabel Bebas yang Berpengaruh Signifikan Terhadap Jumlah Kematian Neonatal Lanjut pada Model 3 .....	138
Gambar 6.4 : Variabel Bebas yang Berpengaruh Signifikan Terhadap Jumlah Kematian Ibu pada Model 4 .....	143
Gambar 6.5 : Variabel Bebas yang Berpengaruh Signifikan Terhadap Jumlah Kematian Neonatal Dini pada Model 4 .....	143
Gambar 6.6 : Variabel Bebas yang Berpengaruh Signifikan Terhadap Jumlah Kematian Neonatal Lanjut pada Model 4 .....	144
Gambar 6.7 : Perbandingan Nilai Dugaan Jumlah Kematian Ibu Terhadap Nilai Aktual .....	145
Gambar 6.8 : Perbandingan Nilai Dugaan Jumlah Kematian Neonatal Dini Terhadap Nilai Aktual .....	145
Gambar 6.9 : Perbandingan Nilai Dugaan Jumlah Kematian Neonatal Lanjut Terhadap Nilai Aktual .....	145





## DAFTAR LAMPIRAN

	Hal
Lampiran 1 : Data Penelitian .....	157
Lampiran 2 : Letak Kabupaten/Kota di Jawa Tengah Berdasarkan Garis Lintang Bujur .....	161
Lampiran 3 : Output Minitab Deskripsi Data .....	163
Lampiran 4 : Uji Distribusi Poisson Trivariat .....	165
Lampiran 5 : Output Minitab Nilai Korelasi Antar Variabel .....	169
Lampiran 6 : Uji Korelasi Antar Respon .....	171
Lampiran 7 : Sintax Program Matlab Model 1 .....	173
Lampiran 8 : Sintax Program Matlab Model 2 .....	177
Lampiran 9 : Sintax Program Matlab Model 3 .....	181
Lampiran 10 : Sintax Program Matlab Model 4 .....	185
Lampiran 11 : Uji Heterogenitas Spasial .....	189
Lampiran 12 : Nilai Bandwidth Optimum pada Model GWMPR .....	191
Lampiran 13 : Hasil Estimasi Parameter dan Nilai Statistik Uji Model 3 ....	193
Lampiran 14 : Hasil Estimasi Parameter dan Nilai Statistik Uji Kovariansi untuk Model 3 .....	201
Lampiran 15 : Uji Kesamaan Model 1 dan Model 3 .....	203
Lampiran 16 : Hasil Estimasi Parameter dan Nilai Statistik Uji Model 4 ....	205
Lampiran 17 : Hasil Estimasi Parameter dan Nilai Statistik Uji Kovariansi untuk Model 4 .....	213
Lampiran 18 : Uji Kesamaan Model 2 dan Model 4 .....	217



## DAFTAR NOTASI

$Y \sim P(\lambda(s))$	: Variabel random $Y$ berdistribusi Poisson dengan nilai rata-rata $\lambda(s)$ .
$s$	: <i>exposure</i> yang didefinisikan sebagai ukuran populasi.
$f(y)$	: Fungsi probabilitas dari variabel random $Y$ .
$f(y_1, y_2, \dots, y_p)$	: Fungsi probabilitas bersama dari variabel random $Y_1, Y_2, \dots, Y_p$ .
$M_Y(t)$	: Fungsi pembangkit momen dari variabel random $Y$ .
$E[Y]$	: Rata-rata dari variabel random $Y$ .
$\text{var}[Y]$	: Variansi dari variabel random $Y$ .
$\text{cov}[Y_h, Y_g]$	: Kovariansi dari variabel random $Y_h$ dan $Y_g$ .
$G(t_1, t_2, \dots, t_p)$	: Fungsi pembangkit probabilitas bersama dari variabel random $Y$ .
$p$	: Banyaknya variabel random atau banyak variabel respon dalam model MPR dan GWMPR.
$h, g$	Indeks untuk banyaknya variabel random atau banyaknya variabel respon dalam model MPR dan GWMPR.
$Q$	: Nilai minimal dari nilai-nilai variabel respon atau dapat ditulis : $\min(y_1, y_2, \dots, y_p)$ .
$k$	: Banyaknya variabel bebas dalam model MPR dan GWMPR.
$l$	: Indeks untuk banyaknya variabel bebas dalam model MPR dan GWMPR.
$i, j$	: Indeks untuk banyaknya amatan/lokasi dalam model.
$\mathbf{x}_i$	: Vektor variabel bebas untuk amatan ke- $i$ .
$\boldsymbol{\beta}$	: Vektor koefisien regresi.
$L(.)$	: Fungsi likelihood.
$\mathbf{H}(.)$	: Matriks Hessian.

$\mathbf{g}(\cdot)$	: Vektor gradien.
$\Omega$	: Ruang parameter di bawah $H_0$ .
$\Omega$	: Ruang parameter di bawah populasi.
$\mathbf{I}(\cdot)$	: Matriks informasi.
$\mathbf{u}_i$	: Vektor koordinat lintang dan bujur di lokasi ke- $i$ .
$\mathbf{W}$	: Matriks pembobot.
$w_{ij}$	: Nilai pembobot lokasi ke- $i$ dan lokasi ke- $j$ .
$K$	: Jumlah parameter efektif dalam model.
$V$	: Statistik uji <i>Young's</i> uji kesamaan model GWPR dan regresi Poisson.
$r_{xy}$	: Korelasi antara variabel $x$ dan $y$ .
$R^2$	: Koefisien determinasi ganda.
$D_a$	: Nilai devians pada uji serentak model regresi Poisson.
$D_b$	: Nilai devians pada uji serentak model GWPR.
$d_{ij}$	: Jarak euclidean lokasi ke- $i$ dan lokasi ke- $j$ .
$b_i$	: <i>Bandwidth</i> lokasi ke- $i$ .
$GCV(b)$	: <i>Generalized Cross Validation</i> dengan <i>bandwidth</i> $b$ .
$VIF$	: <i>Variance Inflation Factor</i> .
$AIC$	: <i>Akaike's Information Criterion</i> .
$\xrightarrow{D}$	: Konvergen secara distribusi.
$\overset{a}{\sim}$	: Distribusi asimtotik.
$Q_1$	: Fungsi log-likelihood model MPR dengan kovariansi merupakan konstanta.
$Q_2$	: Fungsi log-likelihood model MPR dengan kovariansi merupakan fungsi variabel bebas.

$Q_1$	: Fungsi log-likelihood model GWMPR dengan kovariansi merupakan konstanta.
$Q_2$	: Fungsi log-likelihood model GWMPR dengan kovariansi merupakan fungsi variabel bebas.
$Z_a$	: Nilai statistik uji parsial pada model regresi Poisson.
$Z_b$	: Nilai statistik uji parsial pada model GWPR.
$G_1$	: Nilai statistik uji serentak model MPR dengan kovariansi merupakan konstanta.
$G_2$	: Nilai statistik uji serentak model MPR dengan kovariansi merupakan fungsi variabel bebas.
$G_3$	: Nilai statistik uji serentak model GWMPR dengan kovariansi merupakan konstanta.
$G_4$	: Nilai statistik uji serentak model GWMPR dengan kovariansi merupakan fungsi variabel bebas.
$Z_1$	: Nilai statistik uji parsial model MPR dengan kovariansi merupakan konstanta.
$Z_2$	: Nilai statistik uji parsial model MPR dengan kovariansi merupakan fungsi variabel bebas.
$Z_3$	: Nilai statistik uji parsial model GWMPR dengan kovariansi merupakan konstanta.
$Z_4$	: Nilai statistik uji parsial model GWMPR dengan kovariansi merupakan fungsi variabel bebas.
$G_{13}$	: Statistik uji <i>Young's</i> uji kesamaan model GWMPR dan MPR dengan kovariansi merupakan konstanta.
$G_{24}$	: Statistik uji <i>Young's</i> uji kesamaan model GWMPR dan MPR dengan kovariansi merupakan fungsi variabel bebas.
Par	: Parameter model regresi
Est	: Estimator parameter model regresi
Se	: Standar error dari estimator parameter

# BAB I

## PENDAHULUAN

### 1.1 Latar Belakang Masalah

Regresi Poisson merupakan salah satu model regresi nonlinear yang digunakan untuk menganalisis hubungan antara variabel respon yang merupakan *count data* dan satu atau lebih variabel bebas. Dalam model ini, menurut Le (2003), variabel respon berdistribusi Poisson yang menyatakan jumlah peristiwa yang terjadi pada interval waktu dan/atau ruang tertentu, misalnya : jumlah penduduk suatu wilayah yang teridentifikasi menderita suatu penyakit tertentu setiap tahun, jumlah kematian ibu melahirkan setiap tahun di suatu wilayah, jumlah panggilan telepon yang masuk tiap menit di bagian reservasi hotel, dan lain-lain.

Kajian tentang regresi Poisson telah banyak dilakukan oleh para peneliti. Nelder dan Wedderburn (1972) dalam artikelnya menjelaskan teknik iterasi regresi linear terboboti dapat digunakan untuk menentukan estimasi parameter dengan data amatan berdistribusi dari keluarga eksponensial. Sebagai alternatif penggunaan metode estimasi parameter, Frome, Kutner, dan Beauchamp (1973) menyajikan metode *maximum likelihood estimator* (MLE), *weighted least square* (WLS), dan *minimum chi square* (MCS) untuk mengestimasi parameter dari regresi Poisson. Berdasarkan hasil kajiannya, dengan memodifikasi pembobot diperoleh hasil perhitungan yang sama untuk ketiga metode. Untuk selanjutnya, Frome (1983) mengembangkan regresi Poisson untuk *rate data*, dimana estimasi parameter dilakukan dengan metode *iteratively reweighted least squares* (IRLS). Sementara itu, Cameron dan Trivedi (1998) memberikan solusi untuk menentukan estimasi parameter dari regresi Poisson dengan metode iterasi *Newton-Raphson* karena metode MLE tidak memberikan persamaan yang *close form*. Pemilihan metode ini didasarkan adanya jaminan konvergen dari proses iterasinya, karena fungsi log-likelihood dari regresi Poisson merupakan fungsi *global concave*. Frome dan Morris (1989) memperluas kajian tentang estimasi parameter dan uji *goodness of fit* model regresi Poisson dengan memperhatikan

adanya *exposure*. Untuk mempermudah komputasi, Zeileis, Kleiber, dan Jackman (2008) mengembangkan program komputasi statistik untuk model *count data* dengan menggunakan software *R*. Pengembangan program dilakukan untuk model *generalized linear model* (GLM) maupun *zero-augmented*. Santos dan Tenreiro (2010) dalam artikelnya menuliskan eksistensi estimasi parameter dengan metode MLE dari regresi Poisson. Keberadaan matriks Hessian yang definit negatif memungkinkan estimasi parameter relatif lebih sederhana dan umumnya proses akan konvergen dalam beberapa iterasi.

Sebagai perluasan dari regresi Poisson univariat, kajian untuk regresi Poisson multivariat telah dilakukan oleh para peneliti. Dimulai dari pengembangan model distribusi Poisson bivariat oleh Holgate (1964), dilanjutkan oleh Kawamura (1976, 1979) berturut-turut mengembangkan struktur dari model distribusi Poisson trivariat dan multivariat. Dalam artikelnya untuk membangun model distribusi Poisson  $p$ -variat didasarkan pada  $(p+1)$  *variate reduction method*, dimana untuk menjamin adanya korelasi antar variabel dengan memasukkan kovariansi dari variabel-variabel tersebut. Untuk menentukan estimasi parameter, Kawamura (1984), Loukas dan Papageorgiou (1991), Johnson, Kotz, dan Balakrishnan (1996) berturut-turut menentukan estimasi parameter dari distribusi Poisson bivariat, trivariat dan multivariat menggunakan metode MLE.

Sementara itu, untuk kajian regresi Poisson multivariat, Jung dan Winkelmann (1993) memperkenalkan regresi Poisson bivariat dengan kovariansi merupakan suatu konstanta dan mengaplikasikannya untuk mempelajari perbedaan karakter antara dua tipe mobilitas tenaga kerja. Dalam kajiannya estimasi parameter dilakukan dengan iterasi *Newton Raphson* karena metode MLE tidak memberikan penyelesaian analitik. Karlis dan Ntzoufras (2003) menjelaskan lebih terperinci bahwa distribusi Poisson bivariat yang dibangun berdasarkan *trivariate reduction method* memungkinkan adanya korelasi positif diantara dua variabel random, dimana korelasi tersebut dapat ditentukan dengan memperhatikan nilai kovariansinya. Lebih lanjut dijelaskan, jika nilai kovariansi sama dengan nol, maka dua variabel random saling bebas dan distribusi Poisson bivariate disebut sebagai *double Poisson distribution*. Untuk mengatasi kesulitan



komputasinya, Karlis dan Ntzoufras (2005) mengembangkan program komputasi statistik untuk regresi Poisson bivariat dengan menggunakan software *R*. Dalam aplikasinya pada data layanan kesehatan, dengan memperhatikan nilai *Akaike Information Criterion* (AIC) diperoleh kesimpulan bahwa regresi Poisson bivariat lebih baik daripada *double Poisson regression*. Berkhout dan Plug (2004) memperkenalkan model bivariat Poisson dengan *conditional probability* untuk mengatasi keterbatasan dari model Poisson bivariat yang mensyaratkan adanya nilai korelasi positif, sehingga model yang terbentuk lebih fleksibel dalam struktur korelasinya. Model lain dari regresi Poisson multivariat dikemukakan oleh Karlis dan Meligkotsidou (2005) yang memperkenalkan regresi Poisson multivariat dengan struktur kovariansi. Berdasarkan kajiannya, estimasi parameter dilakukan dengan algoritma *expectation-maximization* (EM), sedangkan statistik uji ditentukan dengan metode *likelihood ratio test* (LRT).

Beberapa kajian tentang regresi Poisson multivariat yang diuraikan di atas didasarkan suatu asumsi homogenitas ukuran populasi. Padahal dalam aplikasinya banyak ditemukan permasalahan yang berkaitan dengan analisis *count data* dengan ukuran populasi yang berbeda. Misalnya untuk memodelkan jumlah kematian ibu melahirkan dengan unit sampel setiap kabupaten/kota, tentunya sangat tergantung kepada jumlah ibu hamil yang kemungkinan besar berbeda untuk masing-masing kabupaten/kota. Selain itu, memperhatikan karakter dari data berdistribusi Poisson yang dibangun dari data agregasi, dimungkinkan adanya permasalahan data spasial, yaitu data hasil pengukuran yang memuat suatu informasi lokasi.

Kajian tentang data spasial telah banyak dilakukan para peneliti. Cressie (1991) menjelaskan bahwa data spasial merupakan salah satu jenis *dependent data* karena ada ketergantungan data dengan lokasi dimana data tersebut dikumpulkan. Misalnya, jumlah kematian bayi di suatu wilayah mempunyai korelasi yang tinggi dengan tingkat sosial ekonomi masyarakat, tetapi untuk suatu daerah yang mempunyai suatu kebijakan subsidi kesehatan untuk masyarakat miskin tentunya korelasi akan menjadi lemah. Charlton dan Fotheringham (2009) menunjukkan bahwa akibat yang terjadi apabila dibentuk suatu model regresi global terhadap

data spasial, maka estimasi parameter yang dihasilkan tidak efisien, sehingga dalam pengujian hipotesis akan mengakibatkan peningkatan kesalahan tipe II.

*Geographically Weighted Regression* (GWR) merupakan salah satu teknik statistik yang dikembangkan oleh Brunsdon, Fotheringham, dan Charlton (1996), untuk analisis data yang memuat heterogenitas spasial. Estimasi parameter dari model GWR tergantung pada lokasi dimana data tersebut dikumpulkan. Dalam kasus ini, lokasi dinyatakan sebagai vektor koordinat dua dimensi dari ruang geografi. Salah satu kelebihan dari model GWR adalah model ini dapat memberikan estimator dari parameter regresi untuk setiap lokasi dan menghasilkan dugaan variabel respon yang lebih baik. Zhang, Gove, dan Heath (2005) menambahkan bahwa estimasi parameter untuk data spasial yang diperoleh dari model lokal akan mempunyai *error* yang lebih kecil, sedemikian sehingga model lokal dapat memberikan gambaran yang lebih riil daripada model global.

Berdasarkan gagasan yang diperoleh dari model GWR, Nakaya, Fotheringham, Brunsdon, dan Charlton (2005) mengembangkan model lokal untuk *count data* yang diberi nama *Geographically Weighted Poisson Regression* (GWPR). Estimasi parameter model ini dilakukan dengan metode MLE dan memanfaatkan fungsi pembobot *kernel Gaussian*. Dalam artikel tersebut, model GWPR diaplikasikan untuk menyajikan hubungan usia kematian terhadap sosial ekonomi, seperti proporsi penduduk usia lanjut, rata-rata kepemilikan rumah, dan rata-rata pengangguran untuk tiap wilayah. Untuk mempermudah komputasi, pada artikel berikutnya Nakaya, Fotheringham, Brunsdon, dan Charlton (2009) memperkenalkan software GWR 4.0 untuk menentukan estimasi parameter dan pengujian hipotesis dari model GWR maupun GWPR. Hedayeghi, Shalaby, dan Persaud (2009) mengaplikasikan model GWPR untuk pemodelan jumlah kecelakaan lalu lintas di Toronto, dan membandingkan hasilnya dengan model GLM. Berdasarkan hasil analisis dengan memperhatikan nilai *mean square error* (MSE) ditunjukkan bahwa model GWPR lebih baik daripada model GLM. Untuk aplikasi regresi Poisson spasial yang lain : Best dan Katja (2000) telah menggunakan regresi Poisson spasial untuk menganalisis pengaruh polusi udara terhadap berbagai masalah pernafasan pada anak. Sementara itu, Yang, Shoff, dan Matthews (2013) mengaplikasikan GWPR untuk menentukan hubungan

antara penundaan perkawinan, rata-rata pasangan tinggal serumah tanpa ikatan perkawinan, dan rata-rata perceraian terhadap jumlah kematian bayi di Amerika.

Beberapa kajian tentang regresi Poisson untuk data spasial sebagaimana uraian di atas masih terbatas untuk kasus univariat, padahal dalam aplikasinya banyak permasalahan dalam analisis data spasial dimana terdapat dua atau lebih variabel respon yang berupa *count data* saling berkorelasi, sehingga diperlukan analisis secara simultan. Berkaitan dengan hal tersebut dengan mempertimbangkan model GWPR, pada penelitian ini dikembangkan model untuk data spasial multivariat dengan variabel respon diskrit yang berdistribusi Poisson melalui *Geographically Weighted Multivariate Poisson Regression* (GWMPR).

Penerapan dari model GWMPR mengacu pada program pembangunan kesehatan yang tertuang dalam Rencana Pembangunan Jangka Menengah Nasional (RPJMN) yang mencakup tentang kesehatan ibu dan anak. Program kesehatan ibu dan anak menjadi sangat penting karena ibu dan anak merupakan unsur penting pembangunan. Angka kematian ibu (AKI) dan angka kematian bayi (AKB) merupakan indikator utama untuk mengukur derajat kesehatan ibu dan anak. Angka ini digunakan untuk mengevaluasi program dan kebijakan kependudukan dan kesehatan suatu negara.

Indonesia merupakan salah satu negara dengan AKI dan AKB sangat tinggi. Badan Pusat Statistik, Badan Kependudukan dan Keluarga Berencana Nasional, dan Kementerian Kesehatan (2013), dalam surveinya menjelaskan bahwa AKB di Indonesia mencapai 32 jiwa per 1.000 kelahiran hidup dan AKI 359 jiwa per 100.000 kelahiran hidup. Kondisi tersebut masih jauh dari target MDGs 2015 yaitu 23 jiwa per 1.000 kelahiran hidup untuk AKB dan 102 jiwa per 100.000 kelahiran hidup untuk AKI. Tingginya AKB di Indonesia didominasi oleh kematian neonatal dini (bayi usia 0-7 hari) dan neonatal lanjut (bayi usia 8-29 hari), yaitu sebesar 59% dari seluruh kematian bayi. Sementara itu, Jawa Tengah menjadi salah satu provinsi yang menyumbang cukup besar terhadap AKI dan AKB di Indonesia. Berdasarkan profil kesehatan Provinsi Jawa Tengah tahun 2013, tercatat 5.894 kasus kematian bayi dan 670 kasus kematian ibu. Hal tersebut dapat diartikan bahwa setiap hari terdapat hampir 16 bayi dan dua ibu meninggal.

Kajian ilmiah baik secara teori maupun aplikasi yang menyebutkan faktor-faktor yang mempengaruhi jumlah kematian ibu dan bayi telah banyak dilakukan para peneliti. Patel, Burnett, dan Curtis (2003) menyebutkan lima komplikasi yang berhubungan dengan kehamilan sebagai penyebab kematian ibu adalah pendarahan postpartum, infeksi nifas, gangguan hipertensi kehamilan, dan aborsi yang tidak aman. Nina dan Purhadi (2014) dalam penelitiannya menyebutkan faktor yang mempengaruhi kematian ibu adalah persentase tenaga kesehatan, sedangkan kematian bayi dipengaruhi oleh persentase persalinan ditangani tenaga kesehatan, persentase kunjungan K4 bagi ibu hamil, persentase rumah tangga berperilaku hidup bersih dan sehat, persentase ibu hamil mendapatkan tablet Fe3, persentase wanita berstatus kawin dibawah 20 tahun, dan persentase peserta KB aktif. Murwati, Kurniarum, dan Zulaikhah (2015) menyatakan faktor yang mempengaruhi kematian bayi dibagi menjadi faktor endogen, yaitu faktor yang dibawa sejak lahir (prematur, berat badan lahir rendah atau kelainan bawaan lahir) dan faktor eksogen yang disebabkan faktor lingkungan, misalnya jarang memeriksakan kandungan ke fasilitas kesehatan, asupan gizi kurang saat hamil dan mengabaikan pola hidup bersih dan sehat.

Permasalahan muncul ketika sebagian besar hasil kajian tentang faktor-faktor penyebab jumlah kematian ibu dan bayi dianalisis secara parsial, padahal dalam kenyataannya kedua variabel saling berkorelasi. Selain itu seringkali analisis dilakukan berdasarkan asumsi homogenitas spasial, padahal jumlah kematian ibu dan bayi untuk setiap kabupaten/kota dimungkinkan adanya heterogenitas spasial. Berkaitan dengan hal tersebut pada penelitian ini dilakukan kajian untuk pemodelan spasial tentang faktor-faktor yang mempengaruhi jumlah kematian ibu dan bayi secara simultan menggunakan model GWMPR dan membandingkan hasilnya dengan model *multivariate Poisson regression* (MPR).

## **1.2 Rumusan Masalah**

Berdasarkan uraian latar belakang masalah di atas, kajian tentang MPR telah banyak dilakukan para peneliti dengan berbagai variasi dari kovariansinya, baik untuk kovariansi diasumsikan sebagai suatu konstanta maupun kovariansi merupakan fungsi dari variabel bebas. Akan tetapi model MPR yang telah dikaji

diasumsikan dengan ukuran populasi yang sama untuk setiap unit sampel, padahal dalam aplikasinya banyak dijumpai permasalahan *count data* dengan ukuran populasi yang berbeda.

Permasalahan lain yang sering muncul dalam regresi Poisson ketika diaplikasikan pada data spasial. Pemodelan regresi Poisson global terhadap data spasial akan menghasilkan model yang tidak tepat, karena adanya *error* heterogenitas spasial. Beberapa kajian regresi Poisson yang mempertimbangkan adanya heterogenitas spasial telah dilakukan para peneliti, akan tetapi masih terbatas untuk kasus univariat melalui model GWPR. Padahal dalam aplikasinya banyak permasalahan dalam *spatial count data* yang melibatkan dua atau lebih variabel respon yang saling berkorelasi sehingga perlu analisis secara simultan.

Berkaitan dengan hal tersebut, perlu dikembangkan model MPR dengan memperhatikan heterogenitas dari ukuran populasi dan sekaligus mempertimbangkan adanya heterogenitas spasial melalui model GWMPR. Pengembangan model dilakukan dengan mempertimbangkan variasi dari kovariansinya, yang dilanjutkan bagaimana untuk mendapatkan estimasi parameter dan statistik uji dari model yang terbentuk.

Sementara itu, salah satu permasalahan dalam bidang kesehatan di Indonesia adalah masih tingginya jumlah kematian bayi (didominasi oleh kematian neonatal dini dan neonatal lanjut) dan jumlah kematian ibu. Berdasarkan karakter dari permasalahan yang ada, hasil pengembangan model MPR dan GWMPR tentunya dapat diaplikasikan untuk membuat model regresi “terbaik” dari faktor-faktor yang mempengaruhi jumlah kematian ibu, neonatal dini, dan neonatal lanjut.

### **1.3 Tujuan Penelitian**

Berdasarkan rumusan masalah yang diuraikan di atas, maka tujuan yang ingin dicapai dalam penelitian ini adalah mengembangkan model MPR dan GWMPR. Pengembangan dilakukan untuk model dengan kovariansi merupakan konstanta dan kovariansi merupakan fungsi variabel bebas serta untuk ukuran populasi yang berbeda. Berdasarkan model yang terbentuk, tujuan selanjutnya dari penelitian ini adalah :

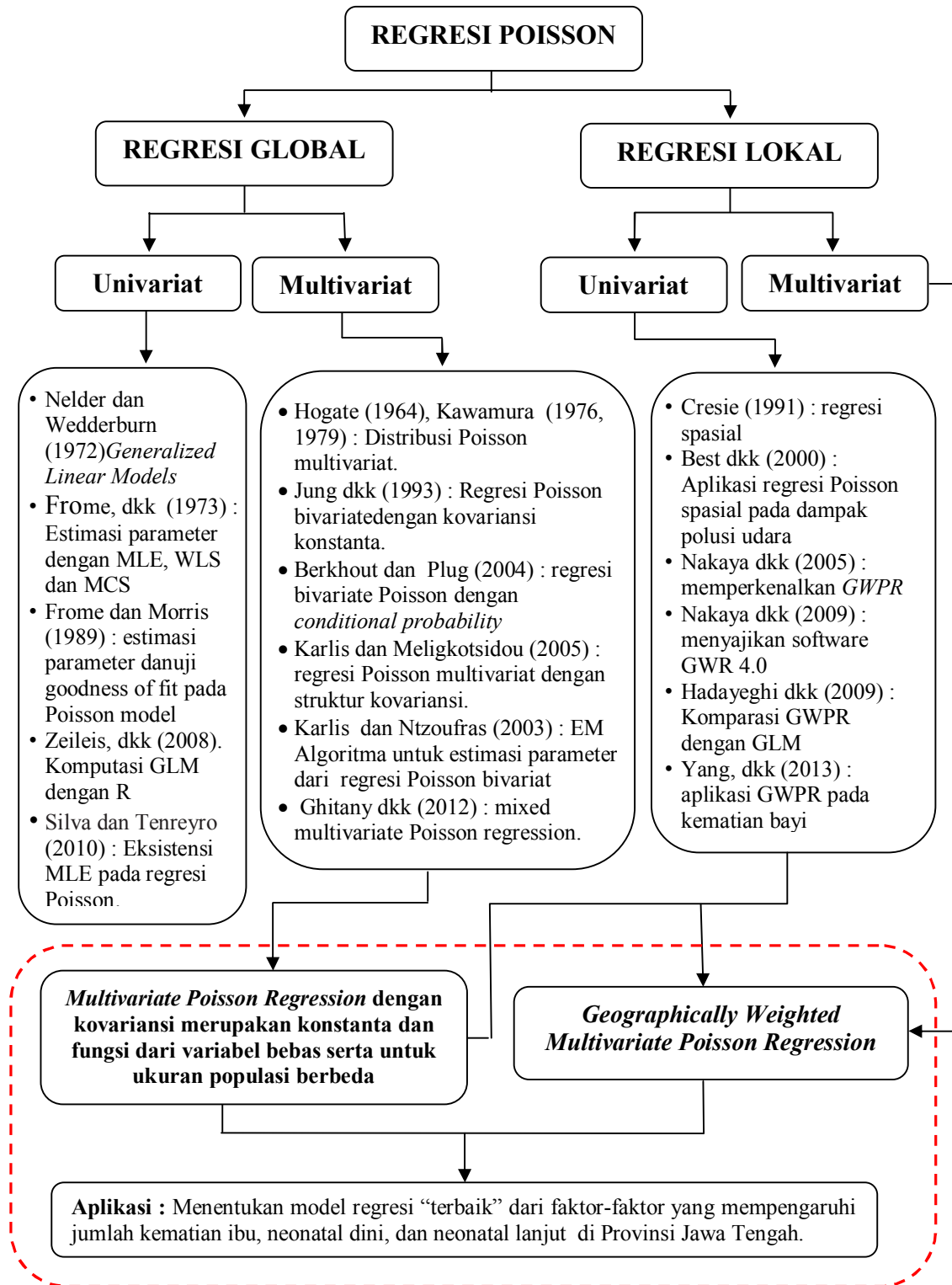
1. Menentukan estimasi parameter dan statistik uji dari model MPR.
2. Menentukan estimasi parameter dan statistik uji dari model GWMPR.
3. Membangun model regresi dari faktor-faktor yang mempengaruhi jumlah kematian ibu, neonatal dini, dan neonatal lanjut di Provinsi Jawa Tengah dengan model MPR dan GWMPR.

#### **1.4 Manfaat dan Orisinalitas Penelitian**

Manfaat penelitian ini adalah memberikan sumbangan untuk pengembangan ilmu statistika. Khususnya dengan telah dikembangkan model MPR dan GWMPR diharapkan dapat menjadi solusi dalam teknik analisis data yang berhubungan dengan regresi Poisson multivariat yang mempertimbangkan adanya heterogenitas spasial. Selain itu diperolehnya model MPR dan GWMPR dari faktor-faktor yang mempengaruhi jumlah kematian ibu, neonatal dini, dan neonatal lanjut di Provinsi Jawa Tengah, tentunya dapat menjadi bahan pertimbangan bagi Dinas Kesehatan Provinsi Jawa Tengah dalam meningkatkan derajat kesehatan ibu dan anak. Peningkatan derajat kesehatan tersebut salah satunya dengan meminimalkan jumlah kematian ibu, neonatal dini, dan neonatal lanjut dengan memperhatikan faktor-faktor yang potensial mempengaruhinya sesuai dengan karakteristik masing-masing kabupaten/kota.

Orisinalitas penelitian ini didasarkan pada penelitian sebelumnya, yaitu telah dikembangkan MPR dengan berbagai variasi dari kovariansinya dan berdasarkan asumsi ukuran populasi yang sama untuk setiap unit sampel. Pada penelitian ini dikembangkan model MPR dengan kovariansi merupakan konstanta dan kovariansi merupakan fungsi variabel bebas serta untuk ukuran populasi yang berbeda. Tahap berikutnya untuk analisis regresi Poisson yang memuat heterogenitas spasial, kajian penelitian sebelumnya masih terbatas untuk kasus univariat melalui model GWPR. Pada penelitian ini dikembangkan model GWMPR sebagai pengembangan model GWPR ketika ada dua atau lebih variabel respon yang saling berkorelasi. Selain itu orisinalitas penelitian ini juga dalam aplikasi, yaitu diperolehnya model MPR dan GWMPR dari faktor-faktor yang mempengaruhi jumlah kematian ibu, neonatal dini, dan neonatal lanjut di Provinsi Jawa Tengah.

Berikut diberikan skema dan posisi penelitian dari penelitian tentang *geographically weighted multivariate Poisson regression*:



Gambar 1.1 Peta Posisi Kegiatan Penelitian

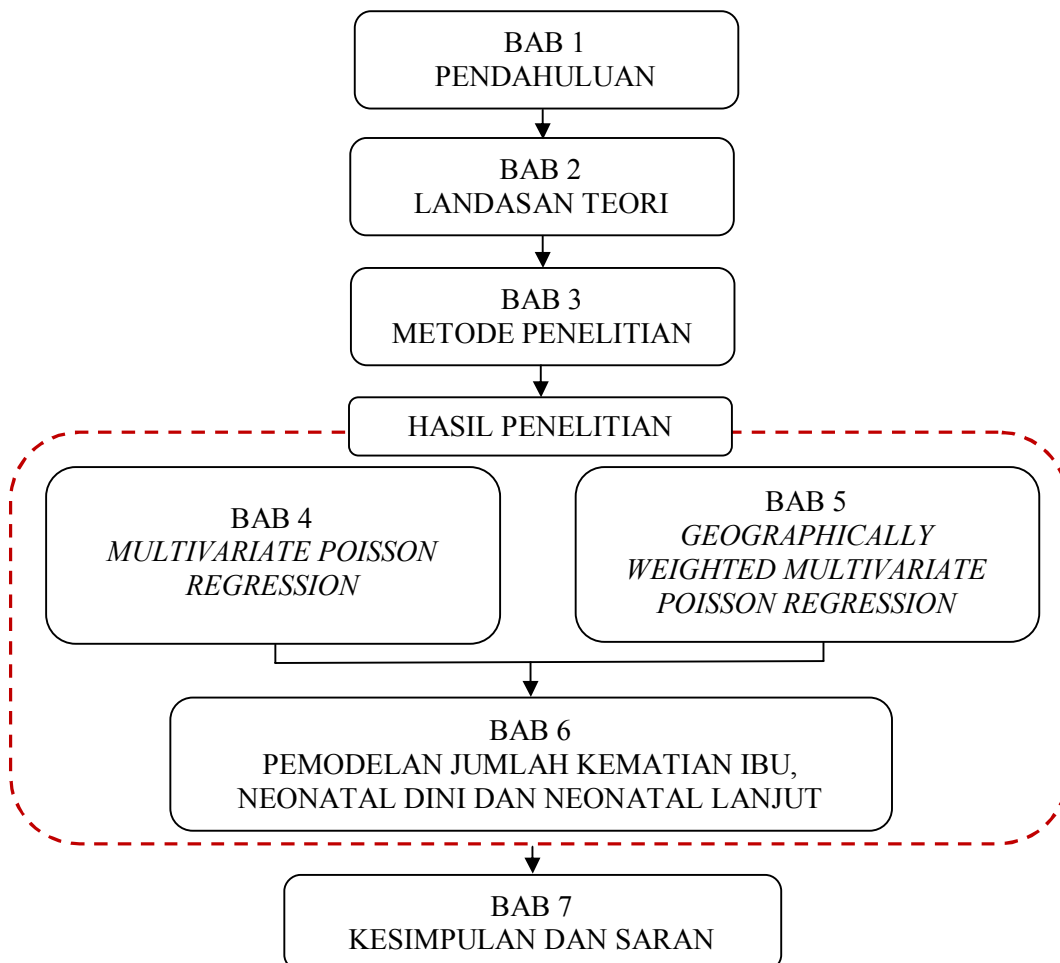
### 1.5 Batasan Masalah

Untuk lebih terarah dalam pembahasannya, penelitian ini membatasi masalah sebagai berikut :

1. Pembobot yang digunakan dalam penelitian ini adalah *Kernel Gaussian* dengan *adaptive bandwidth*.
2. Letak koordinat sebagai titik setiap lokasi ditentukan di pusat pemerintahan kabupaten/kota.
3. Penentuan estimasi parameter menggunakan metode *maximum likelihood estimation* dengan proses iterasi menggunakan algoritma *Newton-Raphson*.

### 1.6 Sistematika Penulisan

Untuk memperjelas kajian setiap tahapan dalam penilitan ini, maka sistematika penulisan disajikan sebagai berikut :



Gambar 1.2 Sistematika Penulisan



## **BAB II**

### **LANDASAN TEORI**

Dalam bab ini dipaparkan tinjauan pustaka terkait dengan model *multivariate Poisson regression* (MPR) dan *geographically weighted multivariate Poisson regression* (GWMPR). Paparan dimulai dengan subbab 2.1 dituliskan distribusi Poisson univariat maupun multivariat, dilanjutkan pada subbab 2.2 tentang model, estimasi parameter, dan pengujian hipotesis dari regresi Poisson univariat. Pada subbab 2.3 dikemukakan konsep data spasial, dilanjutkan pada subbab 2.4 disajikan model *geographically weighted Poisson regression* (GWPR), yang secara terperinci dijelaskan model, estimasi parameter, pengujian hipotesis, dan penentuan pembobot optimum. Pada subbab 2.5 dan subbab 2.6 berturut-turut disajikan multikolinearitas dan pemilihan model regresi “terbaik”. Selanjutnya pada subbab 2.7 dikemukakan sifat asimtotik normalitas dari *maximum likelihood estimator* (MLE). Pada akhir bab ini disajikan kajian tentang kematian ibu dan bayi beserta kerangka konseptual dari faktor-faktor yang mempengaruhinya.

#### **2.1 Distribusi Poisson**

Distribusi Poisson merupakan salah satu distribusi dari variabel random diskrit yang merupakan pendekatan dari distribusi Binomial untuk ukuran populasi yang besar. Cameron dan Trivedi (1998) memberikan beberapa karakteristik dari percobaan yang mengikuti sebaran distribusi Poisson, yaitu :

1. Probabilitas kejadian suatu percobaan kecil untuk ukuran populasi yang besar,
2. Percobaan diamati pada suatu interval waktu tertentu,
3. Kejadiannya termasuk ke dalam *counting process* atau termasuk ke dalam lingkup proses stokastik,
4. Percobaan merupakan perulangan dari kejadian yang mengikuti sebaran distribusi Binomial.

### 2.1.1 Distribusi Poisson Univariat

Suatu variabel random diskrit  $Y$  dikatakan berdistribusi Poisson dengan parameter  $\lambda(s)$  dengan  $s$  merupakan *exposure* (misalnya : interval waktu, ukuran populasi atau luasan) jika dan hanya jika fungsi probabilitasnya berbentuk :

$$f(y | \lambda(s)) = \begin{cases} \frac{e^{-\lambda(s)} \lambda(s)^y}{y!} & ; y = 0, 1, 2, \dots ; \lambda(s) \geq 0 \\ 0 & ; y \text{ yang lain.} \end{cases} \quad (2.1)$$

Fungsi pembangkit momen, rata-rata dan variansi dari variabel random  $Y$  yang berdistribusi Poisson dengan parameter  $\lambda(s)$ , berturut-turut adalah :

$$M_Y(t) = e^{\lambda(s)(e^t - 1)}, \quad E[Y] = \lambda(s), \quad \text{dan} \quad Var[Y] = \lambda(s). \quad (2.2)$$

Fungsi probabilitas pada persamaan (2.1), dapat ditulis sebagai bentuk kanonik dari keluarga eksponensial dengan *natural parameter*  $\ln \lambda(s)$ , sebagai berikut:

$$f(y) = \exp[y \ln \lambda(s) - \lambda(s) - \ln y!]. \quad (2.3)$$

### 2.1.2 Distribusi Poisson Multivariat

Distribusi Poisson multivariat merupakan distribusi gabungan dari dua atau lebih variabel random yang masing-masing berdistribusi Poisson dan saling berkorelasi. Fungsi probabilitas bersama dari distribusi Poisson multivariat untuk  $p$  variabel random dapat digunakan  $(p+1)$  *variate reduction method*. Misalkan  $Z_0, Z_1, Z_2, \dots, Z_p$  merupakan variabel random yang saling bebas dan masing-masing berdistribusi Poisson dengan parameter secara berurutan adalah  $\lambda_0(s), \lambda_1(s), \dots, \lambda_p(s)$  dengan  $s$  merupakan *exposure*.

Diberikan variabel random baru  $Y_1, Y_2, \dots, Y_p$  sebagai berikut :

$$Y_h = Z_h + Z_0 \quad ; h = 1, 2, \dots, p. \quad (2.4)$$

Fungsi pembangkit momen, rata-rata dan variansi dari variabel random  $Y_h$  ( $h=1, 2, \dots, p$ ), berturut-turut adalah :

$$M_{Y_h}(t) = e^{(\lambda_h(s) + \lambda_0(s))(e^t - 1)}, \quad (2.5)$$

$$E[Y_h] = Var[Y_h] = \lambda_h(s) + \lambda_0(s). \quad (2.6)$$

Memperhatikan persamaan (2.4) yang menunjukkan adanya ketergantungan setiap  $Y_h$  terhadap  $Z_0$ , maka variabel random  $Y_1, Y_2, \dots, Y_p$  secara bersama-sama berdistribusi Poisson multivariat dengan fungsi probabilitas bersama dapat ditentukan dengan menggunakan fungsi pembangkit probabilitas bersama sebagai berikut :

$$\begin{aligned} G(t_1, t_2, \dots, t_p) &= E[t_1^{Y_1} t_2^{Y_2} \dots t_p^{Y_p}] \\ &= E[t_1^{Z_1} t_2^{Z_2} \dots t_p^{Z_p} (t_1 t_2 \dots t_p)^{Z_0}]. \end{aligned}$$

Mengingat variabel random  $Z_0, Z_1, Z_2, \dots, Z_p$  berdistribusi Poisson yang saling bebas, maka

$$\begin{aligned} G(t_1, t_2, \dots, t_p) &= \sum_{z_1=0}^{\infty} t_1^{z_1} \frac{e^{-\lambda_1(s)} \lambda_1^{z_1}(s)}{z_1!} \dots \sum_{z_p=0}^{\infty} t_p^{z_p} \frac{e^{-\lambda_p(s)} \lambda_p^{z_p}(s)}{z_p!} \sum_{z_0=0}^{\infty} (t_1 t_2 \dots t_p)^{z_0} \frac{e^{-\lambda_0(s)} \lambda_0^{z_0}(s)}{z_0!} \\ &= e^{-(\lambda_0(s) + \lambda_1(s) + \dots + \lambda_p(s))} \sum_{z_1=0}^{\infty} \dots \sum_{z_p=0}^{\infty} \sum_{z_0=0}^{\infty} \frac{\lambda_1^{z_1}(s) \dots \lambda_p^{z_p}(s) \lambda_0^{z_0}(s)}{z_1! z_2! \dots z_p! z_0!} t_1^{z_1+z_0} t_2^{z_2+z_0} \dots t_p^{z_p+z_0}. \end{aligned} \quad (2.7)$$

Misalkan diberikan transformasi  $v = z_0$  dan  $y_h = z_h + v$  ( $h=1, 2, \dots, p$ ) maka persamaan (2.7) dapat dituliskan sebagai :

$$\begin{aligned} G(t_1, t_2, \dots, t_p) &= e^{-(\lambda_0(s) + \lambda_1(s) + \dots + \lambda_p(s))} \sum_{y_1=v}^{\infty} \dots \sum_{y_p=v}^{\infty} \sum_{v=0}^q \frac{\lambda_1^{y_1-v}(s) \dots \lambda_p^{y_p-v}(s) \lambda_0^v(s)}{(y_1-v)!(y_2-v)! \dots (y_p-v)! v!} t_1^{y_1} t_2^{y_2} \dots t_p^{y_p} \\ &= e^{-(\lambda_0(s) + \sum_{h=1}^p \lambda_h(s))} \sum_{y_1=v}^{\infty} \dots \sum_{y_p=v}^{\infty} \sum_{v=0}^q \frac{\lambda_0^v(s)}{v!} \prod_{h=1}^p \frac{\lambda_h^{y_h-v}(s)}{(y_h-v)!} t_h^{y_h}. \end{aligned} \quad (2.8)$$

Berdasarkan fungsi pembangkit probabilitas pada persamaan (2.8), maka diperoleh fungsi probabilitas bersama dari distribusi Poisson multivariat  $Y_1 = y_1, Y_2 = y_2, \dots, Y_p = y_p$  sebagai berikut :

$$f(y_1, y_2, \dots, y_p | \lambda_0(s), \lambda_1(s), \dots, \lambda_p(s)) = \begin{cases} e^{-(\lambda_0(s) + \sum_{h=1}^p \lambda_h(s))} \sum_{v=0}^q \frac{\lambda_0^v(s)}{v!} \prod_{h=1}^p \frac{\lambda_h^{y_h-v}(s)}{(y_h-v)!} & ; y_h = 0, 1, 2, \dots \\ 0 & ; \text{yang lain,} \end{cases} \quad (2.9)$$

dimana,  $q = \min(y_1, y_2, \dots, y_p)$  dan  $\lambda_h(s) \geq 0$ .

Misalkan  $Y_h$  dan  $Y_g$  ( $h, g = 1, 2, \dots, p$  ;  $h \neq g$ ) merupakan variabel random berdistribusi Poisson dengan rata-rata berturut-turut ( $\lambda_h(s) + \lambda_0(s)$ ) dan ( $\lambda_g(s) + \lambda_0(s)$ ), maka kovariansi dari  $Y_h$  dan  $Y_g$  adalah :

$$\begin{aligned} \text{cov}[Y_h, Y_g] &= \text{cov}[Z_h + Z_0, Z_g + Z_0] \\ &= E[(Z_h + Z_0)(Z_g + Z_0)] - E[Z_h + Z_0]E[Z_g + Z_0] \\ &= E[Z_0^2] - (E[Z_0])^2 \\ &= \lambda_0(s). \end{aligned} \tag{2.10}$$

## 2.2 Regresi Poisson Univariat

Regresi Poisson merupakan suatu teknik statistika yang digunakan untuk memodelkan jumlah kejadian suatu percobaan pada periode waktu atau wilayah tertentu dengan variabel respon merupakan *count data*.

Untuk membangun model regresi Poisson, diberikan sampel random  $Y_i \sim P(\lambda(s_i))$  ;  $i=1, 2, \dots, n$  dengan  $s_i$  merupakan *exposure* yang didefinisikan sebagai ukuran populasi unit ke- $i$ . Memperhatikan persamaan (2.3), bahwa distribusi Poisson merupakan keluarga ekponensial dengan *natural parameter* adalah  $\ln \lambda(s_i)$  atau dengan *link function* adalah logaritma natural (“ln”), maka model regresi Poisson dapat dituliskan sebagai logaritma natural dari nilai ekspektasi  $Y_i$  yang proporsional terhadap ukuran populasi  $s_i$  bergantung pada variabel bebas  $\mathbf{x}_i$ , sebagai berikut :

$$\begin{aligned} \ln \frac{E[Y_i]}{s_i} &= \mathbf{x}_i^T \boldsymbol{\beta}, \\ E[Y_i] &= s_i e^{\mathbf{x}_i^T \boldsymbol{\beta}}, \end{aligned}$$

atau dapat ditulis

$$\lambda(s_i) = s_i e^{\mathbf{x}_i^T \boldsymbol{\beta}}, \tag{2.11}$$

dimana

$$\begin{aligned} \mathbf{x}_i &= [1 \quad x_{1i} \quad x_{2i} \quad \dots \quad x_{ki}]^T, \\ \boldsymbol{\beta} &= [\beta_0 \quad \beta_1 \quad \beta_2 \quad \dots \quad \beta_k]^T. \end{aligned}$$

### 2.2.1 Estimasi Parameter

Estimasi parameter dari regresi Poisson dilakukan dengan menggunakan metode MLE. Ide dasar dari MLE adalah menentukan estimator dari parameter dengan memaksimumkan fungsi likelihood. Misalkan diberikan  $n$  sampel random dari variabel random  $Y_i \sim P(\lambda(s_i))$ .

Mempertimbangkan fungsi probabilitas pada persamaan (2.1), maka fungsi likelihood dapat ditulis sebagai berikut :

$$L(\lambda(s_1), \lambda(s_2), \dots, \lambda(s_n)) = \prod_{i=1}^n \frac{e^{-\lambda(s_i)} \lambda^{y_i}(s_i)}{y_i!}. \quad (2.12)$$

Dengan mensubstitusikan persamaan (2.11) ke dalam persamaan (2.12) diperoleh fungsi likelihood sebagai berikut :

$$L(\boldsymbol{\beta}) = \prod_{i=1}^n \frac{\exp(-s_i e^{\mathbf{x}_i^T \boldsymbol{\beta}}) (s_i e^{\mathbf{x}_i^T \boldsymbol{\beta}})^{y_i}}{y_i!}. \quad (2.13)$$

Jika  $l(\boldsymbol{\beta}) = \ln L(\boldsymbol{\beta})$ , maka fungsi log-likelihood dapat ditulis :

$$l(\boldsymbol{\beta}) = \sum_{i=1}^n \left( -s_i e^{\mathbf{x}_i^T \boldsymbol{\beta}} + y_i \mathbf{x}_i^T \boldsymbol{\beta} + y_i \ln s_i - \ln(y_i!) \right). \quad (2.14)$$

Untuk memaksimumkan fungsi log-likelihood,  $l(\boldsymbol{\beta})$  diturunkan terhadap  $\boldsymbol{\beta}$  disamakan dengan nol, sebagai berikut :

$$\frac{\partial l(\boldsymbol{\beta})}{\partial \boldsymbol{\beta}} = \sum_{i=1}^n (-\mathbf{x}_i s_i e^{\mathbf{x}_i^T \boldsymbol{\beta}} + y_i \mathbf{x}_i) = 0. \quad (2.15)$$

Persamaan (2.15) merupakan sistem persamaan non linear sehingga MLE tidak dapat menghasilkan penyelesaian analitik. Oleh karena itu untuk mendapatkan estimator dapat dilakukan dengan iterasi secara numerik melalui algoritma *Newton-Raphson* dengan formula sebagai berikut :

$$\hat{\boldsymbol{\beta}}_{(t+1)} = \hat{\boldsymbol{\beta}}_{(t)} - \mathbf{H}^{-1}(\hat{\boldsymbol{\beta}}_{(t)}) \mathbf{g}(\hat{\boldsymbol{\beta}}_{(t)}), \quad (2.16)$$

dimana

$\hat{\boldsymbol{\beta}}_{(t)}$  adalah estimator parameter pada iterasi ke- $t$ ,

$$\mathbf{g}^T(\hat{\boldsymbol{\beta}}_{(t)}) = \left( \frac{\partial l(\boldsymbol{\beta})}{\partial \beta_0} \quad \frac{\partial l(\boldsymbol{\beta})}{\partial \beta_1} \quad \dots \quad \frac{\partial l(\boldsymbol{\beta})}{\partial \beta_k} \right)_{\boldsymbol{\beta}=\hat{\boldsymbol{\beta}}_{(t)}},$$

adalah vektor gradien, dengan turunan parsial pertama log-likelihood terhadap masing-masing parameter adalah :

$$\frac{\partial l(\boldsymbol{\beta})}{\partial \boldsymbol{\beta}} \bigg|_{\boldsymbol{\beta}=\hat{\boldsymbol{\beta}}_{(t)}} = \sum_{i=1}^n (-\mathbf{x}_i s_i e^{\mathbf{x}_i^T \hat{\boldsymbol{\beta}}_{(t)}} + y_i \mathbf{x}_i),$$

$$\mathbf{H}(\hat{\boldsymbol{\beta}}_{(t)})_{(k+1) \times (k+1)} = \begin{pmatrix} \frac{\partial^2 l(\boldsymbol{\beta})}{\partial \beta_0^2} & \frac{\partial^2 l(\boldsymbol{\beta})}{\partial \beta_0 \partial \beta_1} & \dots & \frac{\partial^2 l(\boldsymbol{\beta})}{\partial \beta_0 \partial \beta_k} \\ \frac{\partial^2 l(\boldsymbol{\beta})}{\partial \beta_0 \partial \beta_1} & \frac{\partial^2 l(\boldsymbol{\beta})}{\partial \beta_1^2} & \dots & \frac{\partial^2 l(\boldsymbol{\beta})}{\partial \beta_1 \partial \beta_k} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial^2 l(\boldsymbol{\beta})}{\partial \beta_0 \partial \beta_k} & \frac{\partial^2 l(\boldsymbol{\beta})}{\partial \beta_1 \partial \beta_k} & \dots & \frac{\partial^2 l(\boldsymbol{\beta})}{\partial \beta_k^2} \end{pmatrix}_{\boldsymbol{\beta}=\hat{\boldsymbol{\beta}}_{(t)}},$$

adalah matriks Hessian, dengan turunan parsial kedua log-likelihood terhadap kombinasi masing-masing parameter adalah :

$$\frac{\partial^2 l(\boldsymbol{\beta})}{\partial \boldsymbol{\beta} \partial \boldsymbol{\beta}^T} \bigg|_{\boldsymbol{\beta}=\hat{\boldsymbol{\beta}}_{(t)}} = -\sum_{i=1}^n \mathbf{x}_i \mathbf{x}_i^T s_i e^{\mathbf{x}_i^T \hat{\boldsymbol{\beta}}_{(t)}}.$$

Proses iterasi dimulai dengan memasukkan nilai estimator awal parameter  $\hat{\boldsymbol{\beta}}_{(0)}$ , yang dapat diperoleh dengan metode *Ordinary Least Square* (OLS), yaitu :

$$\hat{\boldsymbol{\beta}}_{(0)} = (\mathbf{X}^T \mathbf{X})^{-1} \mathbf{X}^T \mathbf{y}^*, \quad (2.17)$$

dimana

$\mathbf{y}^* = [y_1^* \quad y_2^* \quad \dots \quad y_n^*]^T$  adalah vektor variabel respon dengan elemen sebagai berikut :

$$y_i^* = \begin{cases} \ln(y_i/s_i) & ; y_i = 1, 2, 3, \dots \\ 0 & ; y_i = 0 \end{cases}.$$

Sedangkan iterasi diakhiri ketika dicapai keadaan konvergen, yaitu :

$$\|\hat{\boldsymbol{\beta}}_{(t+1)} - \hat{\boldsymbol{\beta}}_{(t)}\| \leq \varepsilon, \text{ dimana } \varepsilon \text{ merupakan bilangan riil positif yang sangat kecil.}$$

### 2.2.2 Pengujian Hipotesis

Pengujian parameter secara serentak dari model regresi Poisson diformulasikan sebagai berikut :

$$H_0 : \beta_1 = \beta_2 = \dots = \beta_k = 0$$

$$H_1 : \text{paling sedikit ada satu } \beta_l \neq 0 \quad ; \quad l = 1, 2, \dots, k. \quad (2.18)$$

Untuk menentukan daerah kritis dari hipotesis dari persamaan (2.18) diperlukan statistik uji yang diperoleh dengan metode *likelihood ratio test* (LRT).

Metode ini dilakukan dengan membandingkan nilai maksimum dari fungsi likelihood untuk ruang parameter di bawah  $H_0$  terhadap ruang parameter di bawah populasi melalui tahapan sebagai berikut :

- Ruang parameter di bawah  $H_0$  adalah  $\omega_a = \{\beta_0\}$ , sehingga nilai maksimum fungsi likelihood dapat ditentukan melalui proses berikut:

$$L(\hat{\omega}_a) = \text{maks } L(\omega_a) = \frac{\exp(-\sum_{i=1}^n s_i e^{\hat{\beta}_0}) \prod_{i=1}^n (s_i e^{\hat{\beta}_0})^{y_i}}{\prod_{i=1}^n y_i!}, \quad (2.19)$$

dimana  $\hat{\beta}_0$  diperoleh dengan memaksimumkan  $L(\omega_a)$ , atau ekuivalen dengan memaksimumkan  $\ln L(\omega_a)$ , yaitu :

$$l_0(\omega_a) = \ln L(\omega_a) = \sum_{i=1}^n (-s_i e^{\beta_0} + y_i \beta_0 + y_i \ln s_i - \ln(y_i!)). \quad (2.20)$$

Untuk memaksimumkan fungsi log-likelihood pada persamaan (2.20),  $l_0(\omega_a)$  diturunkan terhadap  $\beta_0$ , dan disamakan dengan nol.

$$\left. \frac{\partial l_0(\omega_a)}{\partial \beta_0} \right|_{\beta_0 = \hat{\beta}_0} = \sum_{i=1}^n (-s_i e^{\hat{\beta}_0} + y_i) = 0,$$

sehingga diperoleh :

$$e^{\hat{\beta}_0} = \frac{\sum_{i=1}^n y_i}{\sum_{i=1}^n s_i},$$

atau dapat dituliskan

$$\hat{\beta}_0 = \ln \sum_{i=1}^n y_i - \ln \sum_{i=1}^n s_i. \quad (2.21)$$

- Himpunan parameter di bawah populasi adalah  $\Omega_a = \{\beta_0, \beta_1, \dots, \beta_k\}$ , sehingga nilai maksimum fungsi likelihood dapat dituliskan:

$$L(\hat{\Omega}_a) = \text{maks } L(\Omega_a) = \frac{\exp(-\sum_{i=1}^n s_i e^{\mathbf{x}_i^T \hat{\boldsymbol{\beta}}}) \prod_{i=1}^n (s_i e^{\mathbf{x}_i^T \hat{\boldsymbol{\beta}}})^{y_i}}{\prod_{i=1}^n y_i!}, \quad (2.22)$$

dimana  $\hat{\beta}$  pada persamaan (2.22) merupakan estimator untuk  $\beta$  yang diperoleh melalui proses iterasi menggunakan algoritma *Newton-Raphson* dari persamaan (2.16).

- Berdasarkan nilai maksimum pada persamaan (2.19) dan (2.22), maka statistik uji LRT diformulasikan sebagai berikut :

$$D_a = -2 \ln \left[ \frac{L(\hat{\omega}_a)}{L(\hat{\Omega}_a)} \right] \\ = 2 \sum_{i=1}^n \left[ \left( y_i \mathbf{x}_i^T \hat{\beta} - s_i e^{\mathbf{x}_i^T \hat{\beta}} \right) - \left( y_i \hat{\beta}_0 - s_i e^{\hat{\beta}_0} \right) \right]. \quad (2.23)$$

Nilai statistik uji (  $D_a$  ) dari persamaan (2.23) adalah nilai devians model regresi Poisson yang didekati dengan distribusi  $\chi^2$  dengan derajat bebas  $k$ . Daerah kritis dari pengujian hipotesis pada persamaan (2.18) adalah  $H_0$  ditolak jika  $D_a > \chi_{(k;\alpha)}^2$ .

Sementara itu, pengujian parameter model secara parsial digunakan untuk mengetahui parameter mana yang memberikan pengaruh signifikan terhadap model. Uji parsial untuk menguji apakah parameter  $\beta_l$  ( $l=1,2,\dots,k$ ) berpengaruh terhadap model diformulasikan sebagai berikut :

$$H_0 : \beta_l = 0, \\ H_1 : \beta_l \neq 0. \quad (2.24)$$

Untuk menentukan daerah kritis pengujian hipotesis dari persamaan (2.24) diperlukan statistik uji, dimana berdasarkan teorema limit pusat, statistik uji dapat dituliskan :

$$Z_a = \frac{\hat{\beta}_l}{\sqrt{\widehat{\text{var}}(\hat{\beta}_l)}} \overset{a}{\sim} N(0,1), \quad (2.25)$$

dimana  $\widehat{\text{var}}(\hat{\beta}_l)$  diperoleh dari elemen diagonal ke  $[l+1]$  dari matriks  $[\mathbf{I}(\hat{\beta})]^{-1}$  dengan  $\mathbf{I}(\hat{\beta}) = E[-\mathbf{H}(\hat{\beta})]$ .

Daerah kritis dari pengujian hipotesis pada persamaan (2.24) adalah  $H_0$  ditolak jika  $|Z_a| > Z_{\alpha/2}$ , dengan  $\alpha$  adalah tingkat signifikansi yang digunakan.



### 2.3 Data Spasial

Data spasial adalah data stokastik yang diperoleh dari hasil observasi yang memuat dua informasi, yaitu : lokasi dan pengukuran. Misalnya, jumlah kematian bayi di suatu wilayah mempunyai korelasi yang tinggi dengan tingkat sosial ekonomi masyarakat, tetapi untuk suatu wilayah yang mempunyai suatu kebijakan subsidi kesehatan untuk masyarakat miskin tentunya korelasi akan menjadi lemah.

Sifat stokastik tersebut mengakibatkan informasi suatu lokasi akan memberikan pengaruh pada lokasi lain atau masing-masing lokasi mempunyai keragaman data yang berbeda. Hal tersebut sesuai pernyataan Tobler dalam Miller (2004), bahwa segala sesuatu saling berhubungan satu dengan yang lainnya, tetapi sesuatu yang dekat lebih mempunyai pengaruh daripada sesuatu yang jauh. Pengaruh spasial antar wilayah dapat dibagi menjadi dua jenis, yaitu ketergantungan spasial dan heterogenitas spasial.

Ketergantungan spasial merupakan suatu kejadian yang menunjukkan adanya hubungan fungsional antara apa yang terjadi di suatu lokasi pengamatan dengan apa yang terjadi di lokasi pengamatan lainnya. Ketergantungan spasial mengacu pada hubungan antara data spasial berdasarkan sifat dari variabel yang diamati dengan ukuran dan bentuk untuk setiap lokasi (Anselin dan Getis, 1992). Semakin kecil unit spasial, maka semakin besar probabilitas bahwa unit di dekatnya akan bergantung secara spasial. Jika unit spasial panjang dan sempit, kemungkinan ketergantungan spasial dengan unit di dekatnya akan lebih besar dibandingkan dengan unit lainnya.

Spasial heterogenitas merupakan permasalahan lain dari pemodelan spasial. Pemodelan regresi global diasumsikan bahwa hubungan dalam pemodelan adalah sama di setiap lokasi pengamatan dimana data diambil, yang biasa disebut dengan asumsi homogenitas (Charlton dan Fotheringham, 2009). Pemodelan regresi global dengan asumsi tersebut akan menghasilkan parameter yang sama untuk setiap wilayah, sementara untuk data spasial sangat dimungkinkan adanya variasi secara kewilayahan yang disebut dengan heterogenitas Spasial.

Heterogenitas spasial menunjukkan adanya keberagaman data dalam hubungan secara kewilayahan. Akibatnya, parameter global yang diduga dari data yang memuat heterogenitas spasial tidak menggambarkan dengan baik fenomena spasial di wilayah tertentu (Miller, 2004).

## 2.4 Geographically Weighted Poisson Regression (GWPR)

Model GWPR merupakan pengembangan dari model regresi Poisson. Model ini menghasilkan estimasi parameter model yang bersifat lokal untuk setiap titik atau lokasi dimana data tersebut dikumpulkan. Menurut Nakaya, Fotheringham, dan Brudson (2005), pada model GWPR, variabel respon  $y$  diprediksi dengan variabel bebas dimana masing-masing koefisien regresinya bergantung pada lokasi dimana data tersebut diamati.

Diberikan sampel random  $Y_i \sim P(\lambda(s_i, \mathbf{u}_i))$  ;  $i=1,2,\dots,n$  dengan  $s_i$  merupakan *exposure* yang didefinisikan sebagai ukuran populasi di lokasi ke- $i$  dan  $\mathbf{u}_i = (u_{1i} \ u_{2i})$  merupakan vektor koordinat dua dimensi (lintang dan bujur) di lokasi ke- $i$ , maka model GWPR dapat ditulis sebagai berikut :

$$\lambda(s_i, \mathbf{u}_i) = s_i e^{\mathbf{x}_i^T \boldsymbol{\beta}(\mathbf{u}_i)}, \quad (2.26)$$

dimana

$$\mathbf{x}_i = [1 \ x_{1i} \ x_{2i} \ \dots \ x_{ki}]^T,$$

$$\boldsymbol{\beta}(\mathbf{u}_i) = [\beta_0(\mathbf{u}_i) \ \beta_1(\mathbf{u}_i) \ \beta_2(\mathbf{u}_i) \ \dots \ \beta_k(\mathbf{u}_i)]^T.$$

### 2.4.1 Estimasi Parameter

Estimasi parameter dari model GWPR dilakukan dengan menggunakan metode *Maximum Likelihood Estimation* (MLE), yaitu menentukan estimator dari parameter dengan memaksimumkan fungsi likelihood.

Misalkan diberikan  $n$  sampel random dari variabel random  $y_i \sim P(\lambda(s_i, \mathbf{u}_i))$ . Berdasarkan fungsi probabilitas pada persamaan (2.1) dan ketergantungan terhadap lokasi, maka fungsi likelihood lokasi ke- $i$  dapat ditulis sebagai berikut :

$$L(\lambda(s_1, \mathbf{u}_1), \lambda(s_2, \mathbf{u}_2), \dots, \lambda(s_n, \mathbf{u}_n)) = \prod_{j=1}^n \frac{e^{-\lambda(s_j, \mathbf{u}_j)} \lambda^{y_j}(s_j, \mathbf{u}_j)}{y_j!}. \quad (2.27)$$

Dengan mensubstitusikan persamaan (2.26) ke dalam persamaan (2.27) diperoleh fungsi likelihood lokasi ke- $i$  sebagai berikut :

$$L(\boldsymbol{\beta}(\mathbf{u}_i)) = \prod_{j=1}^n \frac{\exp(-s_j e^{\mathbf{x}_j^T \boldsymbol{\beta}(\mathbf{u}_i)}) (s_j e^{\mathbf{x}_j^T \boldsymbol{\beta}(\mathbf{u}_i)})^{y_j}}{y_j!}. \quad (2.28)$$

Jika  $l(\boldsymbol{\beta}(\mathbf{u}_i)) = \ln L(\boldsymbol{\beta}(\mathbf{u}_i))$ , maka

$$l(\boldsymbol{\beta}(\mathbf{u}_i)) = \sum_{j=1}^n \left( -s_j e^{\mathbf{x}_j^T \boldsymbol{\beta}(\mathbf{u}_i)} + y_j \mathbf{x}_j^T \boldsymbol{\beta}(\mathbf{u}_i) + y_j \ln s_j - \ln(y_j!) \right). \quad (2.29)$$

Dalam model GWPR, koefisien regresi memiliki nilai yang berbeda-beda untuk masing-masing wilayah yang menunjukkan sifat lokal dari model. Oleh karena itu untuk menentukan estimasi parameter pada lokasi ke- $i$  diperlukan informasi dari lokasi yang lain (misalnya lokasi ke- $j$ ) dengan pembobot  $w_{ij}$ , dimana penentuan pembobot optimum disajikan pada subbab 2.4.3. Fungsi log-likelihood lokasi ke- $i$  pada persamaan (2.29) dapat dituliskan sebagai fungsi log-likelihood terboboti untuk lokasi ke- $i$  sebagai berikut :

$$l^*(\boldsymbol{\beta}(\mathbf{u}_i)) = \sum_{j=1}^n \left( -s_j e^{\mathbf{x}_j^T \boldsymbol{\beta}(\mathbf{u}_i)} + y_j \mathbf{x}_j^T \boldsymbol{\beta}(\mathbf{u}_i) + y_j \ln s_j - \ln(y_j!) \right) w_{ij}. \quad (2.30)$$

Untuk memaksimumkan fungsi log-likelihood terboboti,  $l^*(\boldsymbol{\beta}(\mathbf{u}_i))$  diturunkan terhadap  $\boldsymbol{\beta}(\mathbf{u}_i)$  dan disamakan dengan nol, sehingga diperoleh:

$$\frac{\partial l^*(\boldsymbol{\beta}(\mathbf{u}_i))}{\partial \boldsymbol{\beta}(\mathbf{u}_i)} = - \sum_{j=1}^n w_{ij} \mathbf{x}_j s_j e^{\mathbf{x}_j^T \boldsymbol{\beta}(\mathbf{u}_i)} + \sum_{j=1}^n w_{ij} y_j \mathbf{x}_j = 0. \quad (2.31)$$

Persamaan (2.31) merupakan sistem persamaan non linear sehingga MLE tidak dapat menghasilkan penyelesaian analitik. Oleh karena itu untuk mendapatkan estimator dapat dilakukan dengan iterasi secara numerik melalui algoritma *Newton Raphson* dengan formula sebagai berikut :

$$\hat{\boldsymbol{\beta}}_{(t+1)}(\mathbf{u}_i) = \hat{\boldsymbol{\beta}}_{(t)}(\mathbf{u}_i) - \mathbf{H}^{-1}(\hat{\boldsymbol{\beta}}_{(t)}(\mathbf{u}_i)) \mathbf{g}(\hat{\boldsymbol{\beta}}_{(t)}(\mathbf{u}_i)), \quad (2.32)$$

dimana

$\hat{\boldsymbol{\beta}}_{(t)}(\mathbf{u}_i)$  adalah estimator parameter pada lokasi ke- $i$  untuk iterasi ke- $t$ ,

$$\mathbf{g}^T(\hat{\boldsymbol{\beta}}_{(t)}(\mathbf{u}_i)) = \left( \frac{\partial l^*(\boldsymbol{\beta}(\mathbf{u}_i))}{\partial \beta_0(\mathbf{u}_i)} \quad \frac{\partial l^*(\boldsymbol{\beta}(\mathbf{u}_i))}{\partial \beta_1(\mathbf{u}_i)} \quad \dots \quad \frac{\partial l^*(\boldsymbol{\beta}(\mathbf{u}_i))}{\partial \beta_k(\mathbf{u}_i)} \right)_{\boldsymbol{\beta}(\mathbf{u}_i) = \hat{\boldsymbol{\beta}}_{(t)}(\mathbf{u}_i)},$$

adalah vektor gradien, dengan turunan parsial pertama fungsi log-likelihood terboboti terhadap masing-masing parameter adalah :

$$\left. \frac{\partial l^*(\boldsymbol{\beta}(\mathbf{u}_i))}{\partial \boldsymbol{\beta}(\mathbf{u}_i)} \right|_{\boldsymbol{\beta}(\mathbf{u}_i) = \hat{\boldsymbol{\beta}}_{(t)}(\mathbf{u}_i)} = \sum_{j=1}^n (-w_{ij} \mathbf{x}_j s_j e^{\mathbf{x}_j^T \hat{\boldsymbol{\beta}}_{(t)}(\mathbf{u}_i)} + w_{ij} y_j \mathbf{x}_j), \quad (2.33)$$

$$\mathbf{H}(\hat{\boldsymbol{\beta}}_{(t)}(\mathbf{u}_i)) = \left( \begin{array}{cccc} \frac{\partial^2 l^*(\boldsymbol{\beta}(\mathbf{u}_i))}{\partial \beta_0^2(\mathbf{u}_i)} & \frac{\partial^2 l^*(\boldsymbol{\beta}(\mathbf{u}_i))}{\partial \beta_0(\mathbf{u}_i) \partial \beta_1(\mathbf{u}_i)} & \dots & \frac{\partial^2 l^*(\boldsymbol{\beta}(\mathbf{u}_i))}{\partial \beta_0(\mathbf{u}_i) \partial \beta_k(\mathbf{u}_i)} \\ \frac{\partial^2 l^*(\boldsymbol{\beta}(\mathbf{u}_i))}{\partial \beta_0(\mathbf{u}_i) \partial \beta_1(\mathbf{u}_i)} & \frac{\partial^2 l^*(\boldsymbol{\beta}(\mathbf{u}_i))}{\partial \beta_1^2(\mathbf{u}_i)} & \dots & \frac{\partial^2 l^*(\boldsymbol{\beta}(\mathbf{u}_i))}{\partial \beta_1(\mathbf{u}_i) \partial \beta_k(\mathbf{u}_i)} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial^2 l^*(\boldsymbol{\beta}(\mathbf{u}_i))}{\partial \beta_0(\mathbf{u}_i) \partial \beta_k(\mathbf{u}_i)} & \frac{\partial^2 l^*(\boldsymbol{\beta}(\mathbf{u}_i))}{\partial \beta_1(\mathbf{u}_i) \partial \beta_k(\mathbf{u}_i)} & \dots & \frac{\partial^2 l^*(\boldsymbol{\beta}(\mathbf{u}_i))}{\partial \beta_k^2(\mathbf{u}_i)} \end{array} \right)_{\boldsymbol{\beta}(\mathbf{u}_i) = \hat{\boldsymbol{\beta}}_{(t)}(\mathbf{u}_i)},$$

adalah matriks Hessian, dengan turunan parsial kedua fungsi log-likelihood terboboti terhadap masing-masing kombinasi parameter dari model adalah :

$$\left. \frac{\partial^2 l^*(\boldsymbol{\beta}(\mathbf{u}_i))}{\partial \boldsymbol{\beta}(\mathbf{u}_i) \partial \boldsymbol{\beta}^T(\mathbf{u}_i)} \right|_{\boldsymbol{\beta}(\mathbf{u}_i) = \hat{\boldsymbol{\beta}}_{(t)}(\mathbf{u}_i)} = - \sum_{j=1}^n w_{ij} \mathbf{x}_j \mathbf{x}_j^T s_j e^{\mathbf{x}_j^T \hat{\boldsymbol{\beta}}_{(t)}(\mathbf{u}_i)}. \quad (2.34)$$

Apabila persamaan (2.33) dan persamaan (2.34) disubstitusikan pada persamaan (2.32) maka diperoleh persamaan berikut :

$$\begin{aligned} \hat{\boldsymbol{\beta}}_{(t+1)}(\mathbf{u}_i) &= \hat{\boldsymbol{\beta}}_{(t)}(\mathbf{u}_i) + \left( \sum_{j=1}^n w_{ij} \mathbf{x}_j \mathbf{x}_j^T s_j e^{\mathbf{x}_j^T \hat{\boldsymbol{\beta}}_{(t)}(\mathbf{u}_i)} \right)^{-1} \sum_{j=1}^n (-w_{ij} \mathbf{x}_j s_j e^{\mathbf{x}_j^T \hat{\boldsymbol{\beta}}_{(t)}(\mathbf{u}_i)} + w_{ij} y_j \mathbf{x}_j) \\ &= \hat{\boldsymbol{\beta}}_{(t)}(\mathbf{u}_i) + \left( \sum_{j=1}^n w_{ij} \mathbf{x}_j \mathbf{x}_j^T \hat{y}_{j(t)} \right)^{-1} \sum_{j=1}^n (-w_{ij} \mathbf{x}_j \hat{y}_{j(t)} + w_{ij} y_j \mathbf{x}_j) \\ &= \hat{\boldsymbol{\beta}}_{(t)}(\mathbf{u}_i) + \left( \sum_{j=1}^n w_{ij} \mathbf{x}_j \mathbf{x}_j^T \hat{y}_{j(t)} \right)^{-1} \left( \sum_{j=1}^n w_{ij} \mathbf{x}_j (y_j - \hat{y}_{j(t)}) \right) \\ &= \left( \sum_{j=1}^n w_{ij} \mathbf{x}_j \mathbf{x}_j^T \hat{y}_{j(t)} \right)^{-1} \left( \sum_{j=1}^n w_{ij} \mathbf{x}_j \hat{y}_{j(t)} \left( \frac{y_j - \hat{y}_{j(t)}}{\hat{y}_{j(t)}} \right) + \sum_{j=1}^n w_{ij} \mathbf{x}_j \mathbf{x}_j^T \hat{y}_{j(t)} \hat{\boldsymbol{\beta}}_{(t)}(\mathbf{u}_i) \right), \end{aligned}$$

atau dapat ditulis

$$\hat{\boldsymbol{\beta}}_{(t+1)}(\mathbf{u}_i) = \left( \sum_{j=1}^n \mathbf{x}_j w_{ij} \hat{y}_{j(t)} \mathbf{x}_j^T \right)^{-1} \left( \sum_{j=1}^n \mathbf{x}_j w_{ij} \hat{y}_{j(t)} \left\{ \frac{y_j - \hat{y}_{j(t)}}{\hat{y}_{j(t)}} + \mathbf{x}_j^T \hat{\boldsymbol{\beta}}_{(t)}(\mathbf{u}_i) \right\} \right). \quad (2.35)$$

Persamaan (2.35) dalam pendekatan matriks dapat dituliskan :

$$\hat{\boldsymbol{\beta}}_{(t+1)}(\mathbf{u}_i) = \left( \mathbf{X}^T \mathbf{W}(\mathbf{u}_i) \mathbf{A}_{(t)}(\mathbf{u}_i) \mathbf{X} \right)^{-1} \left( \mathbf{X}^T \mathbf{W}(\mathbf{u}_i) \mathbf{A}_{(t)}(\mathbf{u}_i) \mathbf{Z}_{(t)}(\mathbf{u}_i) \right), \quad (2.36)$$

dimana

$\mathbf{W}(\mathbf{u}_i)$  adalah matriks pembobot untuk lokasi ke- $i$ , dinotasikan sebagai :

$$\mathbf{W}(\mathbf{u}_i) = \text{diag}(w_{i1}, w_{i2}, \dots, w_{in}).$$

$\mathbf{A}_{(t)}(\mathbf{u}_i)$  adalah matriks pembobot varians untuk setiap lokasi- $i$  pada iterasi ke- $t$  yang dinotasikan sebagai :

$$\mathbf{A}_{(t)}(\mathbf{u}_i) = \text{diag}(\hat{y}_1(\boldsymbol{\beta}_{(t)}(\mathbf{u}_i)), \hat{y}_2(\boldsymbol{\beta}_{(t)}(\mathbf{u}_i)), \dots, \hat{y}_n(\boldsymbol{\beta}_{(t)}(\mathbf{u}_i))),$$

$\mathbf{Z}_{(t)}(\mathbf{u}_i)$  adalah vektor *adjusted* dari variabel respon pada iterasi ke- $t$  yang didefinisikan sebagai berikut :

$$\mathbf{Z}_{(t)}(\mathbf{u}_i) = \begin{pmatrix} z_{1(t)}(\mathbf{u}_i) & z_{2(t)}(\mathbf{u}_i) & \dots & z_{n(t)}(\mathbf{u}_i) \end{pmatrix}^T,$$

$$z_{i(t)}(\mathbf{u}_i) = \left\{ \left( \frac{y_i - \hat{y}_i(\hat{\boldsymbol{\beta}}_{(t)}(\mathbf{u}_i))}{\hat{y}_i(\hat{\boldsymbol{\beta}}_{(t)}(\mathbf{u}_i))} \right) + \mathbf{x}_i^T \hat{\boldsymbol{\beta}}_{(t)}(\mathbf{u}_i) \right\}.$$

Estimasi parameter lokal diperoleh ketika iterasi telah mencapai keadaan konvergen, yaitu:

$\|\boldsymbol{\beta}_{(t+1)}(\mathbf{u}_i) - \boldsymbol{\beta}_{(t)}(\mathbf{u}_i)\| \leq \varepsilon$ , dimana  $\varepsilon$  merupakan bilangan riil positif sangat kecil.

Tanpa menyertakan indeks dari iterasinya, kondisi konvergen persamaan (2.36) dapat dituliskan :

$$\hat{\boldsymbol{\beta}}(\mathbf{u}_i) = (\mathbf{X}^T \mathbf{W}(\mathbf{u}_i) \mathbf{A}(\mathbf{u}_i) \mathbf{X})^{-1} (\mathbf{X}^T \mathbf{W}(\mathbf{u}_i) \mathbf{A}(\mathbf{u}_i) \mathbf{Z}(\mathbf{u}_i)).$$

Banyaknya parameter efektif model GWPR dapat ditentukan sebagai nilai *trace* dari *hat matrix*, yaitu :

$$K = \text{trace}(\mathbf{H}), \quad (2.37)$$

dimana

$K$  = banyaknya parameter efektif dalam model, dan

$$\mathbf{H} = \mathbf{X} (\mathbf{X}^T \mathbf{W}(\mathbf{u}_i) \mathbf{A}(\mathbf{u}_i) \mathbf{X})^{-1} (\mathbf{X}^T \mathbf{W}(\mathbf{u}_i) \mathbf{A}(\mathbf{u}_i)).$$

#### 2.4.2 Pengujian Hipotesis

Pengujian hipotesis model GWPR terdiri atas uji kesamaan model GWPR dan regresi Poisson global, uji parameter secara serentak, dan uji parameter secara parsial.

### Uji Kesamaan Model GWPR dan Regresi Poisson

Pengujian ini untuk mengetahui apakah ada perbedaan model GWPR dan model regresi Poisson dengan formula sebagai berikut :

$$\begin{aligned} H_0 : \beta_l(\mathbf{u}_i) &= \beta_l \quad ; l = 1, 2, \dots, k \quad ; i = 1, 2, \dots, n \\ H_1 : &\text{paling sedikit ada satu } \beta_l(\mathbf{u}_i) \neq \beta_l \end{aligned} \quad (2.38)$$

Formula pengujian hipotesis pada persamaan (2.38) merupakan model *non-nested*, sehingga dapat digunakan statistik uji dari *Young's test* yang dikenalkan oleh Young (1989) dengan statistik uji sebagai berikut :

$$V = \frac{\sqrt{n} \left( \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n m_i \right)}{\sqrt{\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n (m_i - \bar{m})^2}}, \quad (2.39)$$

dimana

$$m_i = y_i(\mathbf{x}_i^T \hat{\boldsymbol{\beta}} - \mathbf{x}_i^T \hat{\boldsymbol{\beta}}(\mathbf{u}_i)) - s_i(e^{\mathbf{x}_i^T \hat{\boldsymbol{\beta}}} - e^{\mathbf{x}_i^T \hat{\boldsymbol{\beta}}(\mathbf{u}_i)}),$$

$\hat{\boldsymbol{\beta}}$  dan  $\hat{\boldsymbol{\beta}}(\mathbf{u}_i)$  berturut-turut merupakan estimator parameter yang diperoleh dari algoritma *Newton-Raphson* pada persamaan (2.16) dan persamaan (2.32).

Berdasarkan teorema limit sentral, statistik uji kesamaan model GWPR dan regresi Poisson pada persamaan (2.39) berdistribusi asimtotik  $N(0,1)$ , sehingga daerah kritis dengan tingkat signifikan  $\alpha$  dari pengujian ini adalah  $H_0$  akan ditolak jika nilai  $|V| > Z_{\alpha/2}$ .

### Uji Serentak

Pengujian parameter secara serentak dari model GWPR diformulasikan sebagai berikut :

$$\begin{aligned} H_0 : \beta_1(\mathbf{u}_i) &= \beta_2(\mathbf{u}_i) = \dots = \beta_k(\mathbf{u}_i) = 0 \\ H_1 : &\text{paling sedikit ada satu } \beta_l(\mathbf{u}_i) \neq 0 \quad ; l = 1, 2, \dots, k \quad ; i = 1, 2, \dots, n. \end{aligned} \quad (2.40)$$

Untuk menentukan daerah kritis dari pengujian hipotesis pada persamaan (2.40) diperlukan nilai statistik uji, yang diperoleh dengan metode LRT. Metode ini dilakukan dengan membandingkan nilai maksimum dari fungsi likelihood untuk ruang parameter pada  $H_0$  terhadap ruang parameter pada populasi melalui tahapan sebagai berikut :

- Ruang parameter di bawah  $H_0$  adalah  $\omega_b = \{\beta_0(\mathbf{u}_i) ; i = 1, 2, \dots, n\}$ , sehingga nilai maksimum fungsi likelihood dapat ditentukan melalui proses berikut:

$$L(\hat{\omega}_b) = \text{maks } L(\omega_b) = \frac{\exp(-\sum_{i=1}^n s_i e^{\hat{\beta}_0(\mathbf{u}_i)}) \prod_{i=1}^n (s_i e^{\hat{\beta}_0(\mathbf{u}_i)})^{y_i}}{\prod_{i=1}^n y_i!}, \quad (2.41)$$

dimana  $\hat{\beta}_0(\mathbf{u}_i)$  diperoleh dengan memaksimumkan  $L(\omega_b)$ , atau ekuivalen dengan memaksimumkan  $\ln L(\omega_b)$  terboboti, yaitu :

$$l_0^*(\omega_b) = \ln L(\omega_b) w_{ij} = \sum_{j=1}^n (-s_j e^{\beta_0(\mathbf{u}_i)} + y_j \beta_0(\mathbf{u}_i) + y_j \ln s_j - \ln(y_j!)) w_{ij}. \quad (2.42)$$

Untuk memaksimumkan fungsi log-likelihood terboboti pada persamaan (2.42)

$l_0^*(\omega_b)$  diturunkan terhadap  $\beta_0(\mathbf{u}_i)$ , dan disamakan dengan nol.

$$\left. \frac{\partial l_0^*(\beta(\mathbf{u}_i))}{\partial \beta_0(\mathbf{u}_i)} \right|_{\beta_0(\mathbf{u}_i) = \hat{\beta}_0(\mathbf{u}_i)} = \sum_{j=1}^n (-w_{ij} s_j e^{\hat{\beta}_0(\mathbf{u}_i)} + w_{ij} y_j) = 0,$$

sehingga diperoleh :

$$e^{\hat{\beta}_0(\mathbf{u}_i)} = \frac{\sum_{j=1}^n w_{ij} y_j}{\sum_{j=1}^n w_{ij} s_j},$$

atau dapat dituliskan

$$\hat{\beta}_0(\mathbf{u}_i) = \ln \sum_{j=1}^n w_{ij} y_j - \ln \sum_{j=1}^n w_{ij} s_j. \quad (2.43)$$

- Himpunan parameter di bawah populasi adalah  $\Omega_b = \{\beta_0(\mathbf{u}_i), \beta_1(\mathbf{u}_i), \dots, \beta_k(\mathbf{u}_i); i = 1, 2, \dots, n\}$ . Nilai maksimum fungsi likelihood dapat dituliskan :

$$L(\hat{\Omega}_b) = \text{maks } L(\Omega_b) = \frac{\exp(-\sum_{i=1}^n s_i e^{\mathbf{x}_i^T \hat{\beta}(\mathbf{u}_i)}) \prod_{i=1}^n (s_i e^{\mathbf{x}_i^T \hat{\beta}(\mathbf{u}_i)})^{y_i}}{\prod_{i=1}^n y_i!}, \quad (2.44)$$

dimana  $\hat{\beta}(\mathbf{u}_i)$  pada persamaan (2.44) merupakan estimator untuk  $\beta(\mathbf{u}_i)$  yang diperoleh melalui proses iterasi menggunakan algoritma *Newton-Raphson* dari persamaan (2.32).

- Berdasarkan nilai maksimum pada persamaan (2.41) dan persamaan (2.44), maka statistik uji LRT diformulasikan sebagai berikut :

$$D_b = -2 \ln \left[ \frac{L(\hat{\omega}_b)}{L(\hat{\Omega}_b)} \right] = 2 \sum_{i=1}^n \left[ \left( y_i \mathbf{x}_i^T \hat{\boldsymbol{\beta}}(\mathbf{u}_i) - s_i e^{\mathbf{x}_i^T \hat{\boldsymbol{\beta}}(\mathbf{u}_i)} \right) - \left( y_i \hat{\beta}_0(\mathbf{u}_i) - s_i e^{\hat{\beta}_0(\mathbf{u}_i)} \right) \right]. \quad (2.45)$$

Nilai statistik uji ( $D_b$ ) dari persamaan (2.45) adalah devians model GWPR yang dapat didekati dengan distribusi  $\chi^2$  dengan derajat bebas ( $b_2 - b_1$ ), dimana  $b_1$  dan  $b_2$  berturut-turut merupakan jumlah parameter efektif dalam model pada ruang  $\omega_b$  dan  $\Omega_b$  yang diperoleh dari formula pada persamaan (2.37). Daerah kritis dari pengujian hipotesis pada persamaan (2.40) adalah  $H_0$  ditolak jika  $D_b > \chi_{(b_2 - b_1; \alpha)}^2$ , dengan  $\alpha$  adalah tingkat signifikansi yang digunakan.

### Uji Parsial

Pengujian parameter model secara parsial digunakan untuk mengetahui parameter mana yang memberikan pengaruh signifikan terhadap model. Uji parsial untuk menguji apakah parameter  $\beta_l(\mathbf{u}_i)$  ( $l=1,2,...,k$  dan  $i=1,2,...,n$ ) berpengaruh terhadap model diformulasikan sebagai berikut:

$$H_0 : \beta_l(\mathbf{u}_i) = 0 \\ H_1 : \beta_l(\mathbf{u}_i) \neq 0. \quad (2.46)$$

Untuk menentukan daerah kritis pengujian hipotesis dari persamaan (2.46) diperlukan statistik uji, dimana berdasarkan teorema limit pusat, statistik uji dapat dituliskan :

$$Z_b = \frac{\hat{\beta}_l(\mathbf{u}_i)}{\sqrt{\widehat{\text{var}}(\hat{\beta}_l(\mathbf{u}_i))}} \sim N(0,1), \quad (2.47)$$

dimana  $\widehat{\text{var}}(\hat{\beta}_l(\mathbf{u}_i))$  diperoleh dari elemen diagonal ke  $[l+1]$  dari dari matriks  $[\mathbf{I}(\hat{\boldsymbol{\beta}}(\mathbf{u}_i))]^{-1}$  dengan  $\mathbf{I}(\hat{\boldsymbol{\beta}}(\mathbf{u}_i)) = E[-\mathbf{H}(\hat{\boldsymbol{\beta}}(\mathbf{u}_i))]$ .

Daerah kritis dari pengujian hipotesis pada persamaan (2.46) adalah  $H_0$  ditolak jika  $|Z_b| > Z_{\alpha/2}$ , dengan  $\alpha$  adalah tingkat signifikansi yang digunakan.



### 2.4.3 Penentuan Pembobot Optimum

Fungsi pembobot spasial model GWR berbasis pada kedekatan lokasi pengamatan ke- $i$  dengan lokasi pengamatan lainnya tanpa adanya hubungan yang dinyatakan secara eksplisit (Fotheringham, 1998). Beberapa fungsi pembobot spasial digunakan untuk menggambarkan hubungan antara lokasi pengamatan ke- $i$  dengan lokasi pengamatan lainnya.

Salah satu pembentukan fungsi pembobot yang berdasarkan kelokalan adalah dengan cara mengeluarkan pengamatan yang memiliki jarak dari lokasi pengamatan ke- $i$  lebih besar dari suatu nilai  $d$  yang ditentukan. Fungsi pembobotnya adalah sebagai berikut:

$$w_{ij} = \begin{cases} 1 & ; \text{ untuk } d_{ij} < d \\ 0 & ; \text{ untuk } d_{ij} \text{ yang lain,} \end{cases} \quad (2.48)$$

dimana  $d_{ij}$  adalah jarak Euclidean antara lokasi pengamatan ke- $i$  dengan lokasi pengamatan ke- $j$ .

$$d_{ij} = \sqrt{(u_i - u_j)^2 + (v_i - v_j)^2}. \quad (2.49)$$

Penggunaan fungsi ini akan menyederhanakan pembentukan model, karena hanya sebagian data saja yang digunakan untuk membentuk model, yaitu yang memiliki jarak dari lokasi pengamatan ke- $i$  lebih kecil daripada  $d$ . Akan tetapi, fungsi tersebut memiliki masalah diskontinuitas, yaitu parameter yang dihasilkan dapat berubah secara drastis ketika lokasi pengamatan berubah.

Untuk mengatasi masalah diskontinuitas pembobot, dapat dilakukan dengan cara membentuk  $w_{ij}$  sebagai fungsi kontinu dari  $d_{ij}$ . Salah satu fungsi yang sering digunakan adalah fungsi pembobot *Gaussian* atau biasa disebut fungsi *fixed kernel Gaussian* yang diusulkan oleh Brunson dkk. (1996):

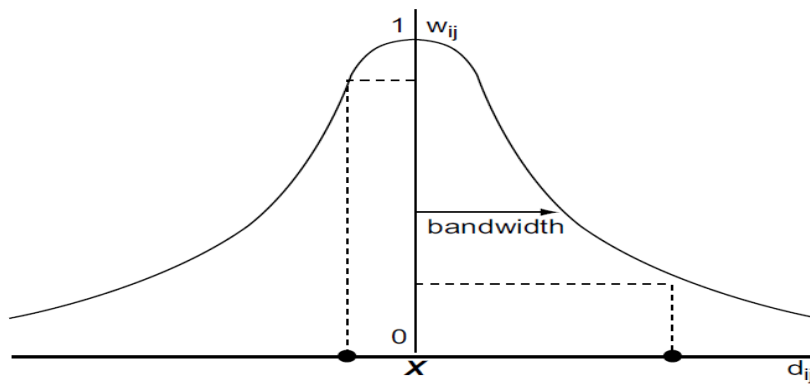
$$w_{ij} = \exp \left[ -\frac{1}{2} \left( \frac{d_{ij}}{b} \right)^2 \right], \quad (2.50)$$

dimana  $b$  adalah parameter non negatif yang biasa disebut sebagai *bandwidth*. Nilai pembobot dari suatu data akan mendekati 1 jika jaraknya berdekatan atau berhimpitan dan akan semakin mengecil sehingga mendekati nol jika jaraknya semakin jauh.

Sebagai alternatif penggunaan fungsi pembobot, Brunson dkk. (1996) juga menawarkan fungsi *fixed kernel bi-square* dengan formula berikut :

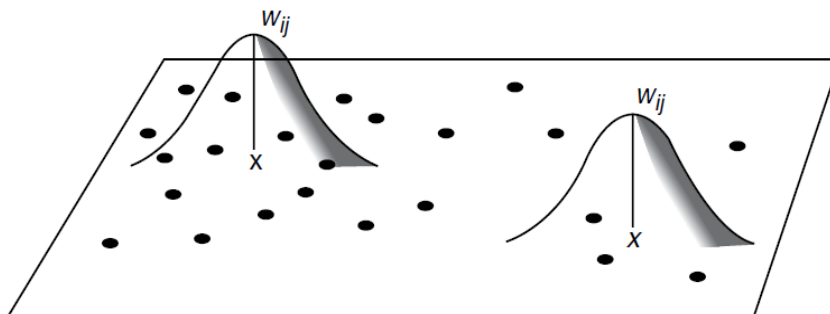
$$w_{ij} = \begin{cases} \left[ 1 - \left( \frac{d_{ij}}{b} \right)^2 \right]^2 & ; \text{ untuk } d_{ij} < b \\ 0 & ; \text{ untuk } d_{ij} \text{ yang lain,} \end{cases} \quad (2.51)$$

yang merupakan fungsi pembobot kontinu dan menyerupai *Gaussian* sampai dengan jarak sejauh  $b$  dari lokasi pengamatan ke- $i$  dan bernilai nol untuk lokasi data yang memiliki jarak lebih besar daripada  $b$ . Hubungan antara *bandwidth* dengan fungsi pembobot disajikan pada Gambar 2.1.



Gambar 2.1 Hubungan antara *bandwidth* dengan pembobot  
(Fotheringham dkk, 2002)

Fungsi *kernel Gaussian* dan *bi-square* di atas merupakan fungsi kernel *fixed*, yaitu fungsi kernel dengan *bandwidth* yang sama di setiap lokasi pengamatan seperti yang disajikan pada Gambar 2.2.



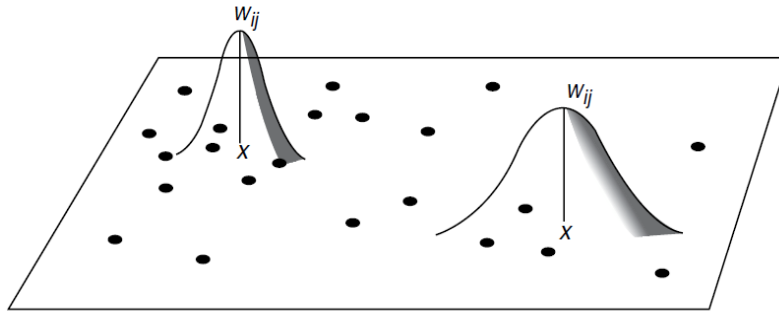
Gambar 2.2 *Fixed bandwidth* (Fotheringham dkk, 2002)

Selain fungsi *fixed kernel*, terdapat juga fungsi *adaptive kernel*. Berbeda dengan fungsi *fixed kernel*, fungsi *adaptive kernel* memiliki *bandwidth* yang berbeda pada masing-masing lokasi pengamatan. Fungsi *adaptive kernel Gaussian* dan *bi-square* berturut-turut disajikan pada persamaan (2.52) dan persamaan (2.53) sebagai berikut :

$$w_{ij} = \exp \left[ -\frac{1}{2} \left( \frac{d_{ij}}{b_i} \right)^2 \right], \quad (2.52)$$

$$w_{ij} = \begin{cases} \left[ 1 - \left( \frac{d_{ij}}{b_i} \right)^2 \right]^2 & ; \text{ untuk } d_{ij} < b_i \\ 0 & ; \text{ untuk } d_{ij} \text{ yang lain,} \end{cases} \quad (2.53)$$

dimana  $b_i$  merupakan *bandwidth* yang merupakan radius suatu lingkaran dimana titik yang berada di dalamnya masih dianggap berpengaruh dalam membentuk model pada lokasi ke- $i$ .



Gambar 2.3 *Adaptive bandwidth* (Fotheringham dkk, 2002)

Memperhatikan beberapa fungsi pembobot di atas, jika nilai *bandwidth* mendekati tak terhingga, maka pembobot ( $w_{ij}$ ) yang dihasilkan antar lokasi pengamatan akan mendekati angka satu, sehingga parameter yang diduga akan seragam dan model GWR yang dihasilkan akan mendekati model regresi global. Sebaliknya, jika nilai *bandwidth* semakin kecil, pendugaan parameter akan semakin tergantung pada lokasi pengamatan yang memiliki jarak yang dekat dengan lokasi pengamatan ke- $i$ , sehingga nilai variansi yang dihasilkan akan semakin besar. Permasalahan yang harus diselesaikan adalah bagaimana menentukan nilai *bandwidth* optimum pada pemodelan GWR.

Untuk mendapatkan *bandwidth* optimum, Craven dan Wahba (1979) mengusulkan pendekatan *generalized cross-validation* (GCV) dengan formula berikut :

$$GCV(b) = \frac{np \sum_{i=1}^n (\mathbf{y}_i - \hat{\mathbf{y}}_i(b))^T (\mathbf{y}_i - \hat{\mathbf{y}}_i(b))}{(np - K)^2}, \quad (2.54)$$

dimana  $\hat{\mathbf{y}}_i(b)$  adalah vektor nilai prediksi  $\mathbf{y}_i$  untuk *bandwidth*  $b$ , dan  $K$  adalah banyaknya parameter efektif dalam model.

Proses untuk mendapatkan *bandwidth* optimum ditentukan oleh nilai *GCV* minimum menggunakan teknik *golden section search*. Proses tersebut sebagaimana dikemukakan Fotheringham dkk (2002), dilakukan dengan cara mengevaluasi fungsi dari tiga nilai yang berbeda. Misalnya nilai tersebut  $a_1$ ,  $a_2$ , dan  $a_3$ , dimana  $a_1$  dan  $a_3$  berturut-turut merupakan nilai minimum dan maksimum dari  $d_{ij}$ , sedangkan  $a_1 < a_2 < a_3$ . Nilai fungsi yang dihasilkan pada tiga titik tersebut adalah  $f(a_1)$ ,  $f(a_2)$ , dan  $f(a_3)$ , yang disebut juga sebagai *triplet*. Fungsi tersebut dievaluasi lagi pada nilai baru  $a_4$  yang ditentukan antara  $a_1$  dan  $a_2$  atau antara  $a_2$  dan  $a_3$  sehingga menghasilkan nilai fungsi baru, yaitu  $f(a_4)$ . Kemudian dibentuk *triplet* baru, dengan aturan sebagai berikut:

jika  $f(a_2) < f(a_4)$  : *triplet* baru yang digunakan adalah  $a_1 < a_2 < a_4$ ,

jika  $f(a_2) > f(a_4)$  : *triplet* baru yang digunakan adalah  $a_2 < a_4 < a_3$ .

Proses tersebut berulang sampai dengan dua nilai  $f(a_4)$  yang dihasilkan mendekati sama atau selisihnya lebih kecil daripada suatu nilai yang ditentukan.

## 2.5 Multikolinearitas

Istilah multikolinearitas merupakan kejadian adanya korelasi yang tinggi diantara variabel-variabel bebas dalam model regresi. Menurut Montgomery dan Peck (1991), multikolinieritas merupakan *ill condition* dalam analisis regresi, yang mengakibatkan beberapa dampak, sebagai berikut :

1. Apabila terjadi multikolinearitas sempurna, maka estimator koefisien regresi tidak dapat ditentukan dan varian serta standar errornya tidak terhingga.
2. Untuk multikolinearitas yang kurang sempurna, estimator koefisien regresi masih dapat dihitung, tetapi nilai variansi dan standar errornya besar.

3. Probabilitas kesalahan tipe II menjadi semakin besar, akibat dari nilai standar error dari estimator koefisien regresi yang besar.
4. Nilai koefisien determinasi ganda ( $R^2$ ) tinggi, tetapi tidak ada atau sedikit sekali koefisien regresi yang signifikan.
5. Estimator koefisien regresi tidak mencerminkan nilai yang sebenarnya, baik *under estimate* atau *over estimate*.

Multikolinearitas dalam analisis regresi dapat diduga dari tingginya nilai korelasi antara variabel bebasnya. Koefisien korelasi sederhana yang cukup tinggi ( $0,8 \leq r \leq 1,0$ ) dapat dijadikan indikator adanya kolinieritas. Selain itu adanya multikolinieritas juga dapat dideteksi melalui nilai *Variance Inflation Factor* (*VIF*) yang dinyatakan dengan rumus :

$$(VIF)_l = \frac{1}{1 - R_l^2}, \quad l=1,2,\dots,k \quad (2.55)$$

dimana  $R_l^2$  adalah koefisien determinasi dari variabel bebas  $x_l$  yang diregresikan terhadap variabel bebas lainnya. Multikolinearitas dapat diketahui apabila nilai  $(VIF)_l$  lebih dari 10. (Yan dan Su, 2009)

## 2.6 Pemilihan Model Regresi “Terbaik”

Dalam analisis regresi, seringkali terjadi adanya jumlah variabel bebas yang cukup besar, sehingga sebagian variabel bebas tersebut berkorelasi yang tidak signifikan (*poor*) terhadap variabel respon. Akibat lain yang sering terjadi adalah keberadaan variabel bebas tersebut berlebihan (*redundant*) karena adanya korelasi yang tinggi dengan variabel bebas yang lain. Keberadaan variabel bebas *poor* maupun *redundant* merupakan “*ill condition*” dalam analisis regresi, dimana akan membawa dampak yang cukup berbahaya untuk tujuan peramalan. Mempertimbangkan hal tersebut dilakukan pemilihan model regresi “terbaik” dengan menghapus variabel bebas *poor* maupun *redundant*, sehingga diperoleh model regresi yang optimal.

Ada beberapa metode yang dapat digunakan untuk pemilihan model regresi “terbaik, dimana metode-metode tersebut dapat dikelompokkan menjadi dua kategori, yaitu : (1) *exhaustive search methods*, yang didasarkan pada metode

*all possible subset of predictors* (2) *systematic selection algorithms*, yang didasarkan pada metode *forward*, *backward*, dan *stepwise*. (Boneh dan Mendieta, 1992).

Salah satu metode untuk pemilihan model regresi multivariat “terbaik” kategori *exhaustive search methods* adalah *Akaike’s Information Criterion (AIC)* yang diformulasikan sebagai berikut :

$$AIC = -2 \ln L(\hat{\theta}) + 2K \quad (2.56)$$

dimana  $K$  adalah banyaknya parameter efektif dalam model.

Model “terbaik” adalah model dengan nilai  $AIC$  terkecil.

## 2.7 Asimtotik Normalitas dari *Maximum Likelihood Estimator*

*Maximum Likelihood Estimator* (MLE) merupakan salah satu metode yang sangat baik digunakan untuk menentukan estimator dari parameter suatu model. Ide dasar dari MLE adalah mencari nilai parameter yang memberi peluang yang paling besar untuk mendapatkan data yang terobservasi sebagai estimator.

Misalkan  $Y$  adalah variabel random dengan fungsi densitas probabilitas  $f(y, \theta)$  dengan  $\theta$  adalah vektor parameter. Jika  $Y_1, Y_2, \dots, Y_n$  merupakan sampel random berukuran  $n$  dari variabel random  $Y$ , maka fungsi likelihood didefinisikan sebagai :

$$\begin{aligned} L(\theta) &= f(y_1, y_2, \dots, y_n | \theta) \\ &= \prod_{i=1}^n f(y_i | \theta). \end{aligned}$$

MLE untuk  $\theta$  adalah nilai  $\theta$  yang memaksimumkan fungsi likelihood. MLE mempunyai sifat asimtotik normalitas yang dijelaskan dalam teorema berikut :

### Teorema 2.1

Misalkan  $\hat{\theta}$  merupakan estimator maksimum likelihood dari  $\theta$ . Untuk *true value*  $\theta_0$ , maka  $\hat{\theta}$  mempunyai sifat asimtotik normalitas sebagai berikut :

$$\hat{\theta} \overset{a}{\sim} N(\theta_0, [I(\theta_0)]^{-1}), \quad (2.57)$$

dimana

$$\mathbf{I}(\boldsymbol{\theta}_0) = -E\left[\frac{\partial^2 \ln L(\boldsymbol{\theta}_0)}{\partial \boldsymbol{\theta}_0 \partial \boldsymbol{\theta}_0^T}\right].$$

### Bukti Teorema 2.1

Misalkan  $\hat{\boldsymbol{\theta}}$  merupakan MLE dari  $\boldsymbol{\theta}$ , maka vektor gradiennya sama dengan nol, yaitu :

$$\mathbf{g}(\hat{\boldsymbol{\theta}}) = \mathbf{0},$$

dimana

$$\mathbf{g}(\hat{\boldsymbol{\theta}}) = \frac{\partial \ln L(\boldsymbol{\theta})}{\partial \boldsymbol{\theta}} \Big|_{\boldsymbol{\theta}=\hat{\boldsymbol{\theta}}}.$$

Jika  $\mathbf{g}(\hat{\boldsymbol{\theta}})$  diekspansi menurut deret Taylor orde 1 disekitar nilai parameter  $\boldsymbol{\theta}_0$  diperoleh :

$$\mathbf{g}(\hat{\boldsymbol{\theta}}) = \mathbf{g}(\boldsymbol{\theta}_0) + \mathbf{H}(\boldsymbol{\theta}_0)(\hat{\boldsymbol{\theta}} - \boldsymbol{\theta}_0), \quad (2.58)$$

dimana,  $\mathbf{H}(\boldsymbol{\theta}_0) = \frac{\partial^2 \ln L(\boldsymbol{\theta})}{\partial \boldsymbol{\theta} \partial \boldsymbol{\theta}^T} \Big|_{\boldsymbol{\theta}=\boldsymbol{\theta}_0}$  merupakan matriks Hessian yang dievaluasi untuk

nilai  $\boldsymbol{\theta}_0$ .

Karena  $\mathbf{g}(\hat{\boldsymbol{\theta}}) = \mathbf{0}$  maka persamaan (2.58) dapat ditulis sebagai berikut :

$$(\hat{\boldsymbol{\theta}} - \boldsymbol{\theta}_0) = [-\mathbf{H}(\boldsymbol{\theta}_0)]^{-1} \mathbf{g}(\boldsymbol{\theta}_0). \quad (2.59)$$

Jika kedua ruas dari persamaan (2.59) dikalikan dengan  $\sqrt{n}$  diperoleh :

$$\sqrt{n}(\hat{\boldsymbol{\theta}} - \boldsymbol{\theta}_0) = [-\mathbf{H}(\boldsymbol{\theta}_0)]^{-1} \sqrt{n} \mathbf{g}(\boldsymbol{\theta}_0). \quad (2.60)$$

Berdasarkan sifat konsisten dari MLE, yaitu :

$$P \lim(\hat{\boldsymbol{\theta}} - \boldsymbol{\theta}_0) = \mathbf{0}$$

Akibatnya,

$$\sqrt{n}(\hat{\boldsymbol{\theta}} - \boldsymbol{\theta}_0) \xrightarrow{D} [-\mathbf{H}(\boldsymbol{\theta}_0)]^{-1} \sqrt{n} \mathbf{g}(\boldsymbol{\theta}_0),$$

atau dapat ditulis

$$\sqrt{n}(\hat{\boldsymbol{\theta}} - \boldsymbol{\theta}_0) \xrightarrow{D} \left[-\frac{1}{n} \mathbf{H}(\boldsymbol{\theta}_0)\right]^{-1} \sqrt{n} \bar{\mathbf{g}}(\boldsymbol{\theta}_0). \quad (2.61)$$

Berdasarkan teorema limit sentral untuk  $\sqrt{n}\bar{\mathbf{g}}(\boldsymbol{\theta}_0)$ , dimana  $E[\sqrt{n}\bar{\mathbf{g}}(\boldsymbol{\theta}_0)] = \mathbf{0}$  dan  $Var[\sqrt{n}\bar{\mathbf{g}}(\boldsymbol{\theta}_0)] = -E[\frac{1}{n}\mathbf{H}(\boldsymbol{\theta}_0)]$ , maka diperoleh :

$$\sqrt{n}\bar{\mathbf{g}}(\boldsymbol{\theta}_0) \xrightarrow{D} N(\mathbf{0}, -E[\frac{1}{n}\mathbf{H}(\boldsymbol{\theta}_0)]). \quad (2.62)$$

Memperhatikan  $P\lim[-\frac{1}{n}\mathbf{H}(\boldsymbol{\theta}_0)] = -E[\frac{1}{n}\mathbf{H}(\boldsymbol{\theta}_0)]$  yang merupakan suatu matriks

konstan, maka persamaan (2.62) dapat dituliskan kembali dalam bentuk :

$$[-\frac{1}{n}\mathbf{H}(\boldsymbol{\theta}_0)]^{-1}\sqrt{n}\bar{\mathbf{g}}(\boldsymbol{\theta}_0) \xrightarrow{D} N(\mathbf{0}, \{-E[\frac{1}{n}\mathbf{H}(\boldsymbol{\theta}_0)]^{-1}\} \{-E[\frac{1}{n}\mathbf{H}(\boldsymbol{\theta}_0)]\} \{-E[\frac{1}{n}\mathbf{H}(\boldsymbol{\theta}_0)]^{-1}\}),$$

atau

$$\sqrt{n}(\hat{\boldsymbol{\theta}} - \boldsymbol{\theta}_0) \xrightarrow{D} N(\mathbf{0}, -E[\frac{1}{n}\mathbf{H}(\boldsymbol{\theta}_0)]^{-1}). \quad (2.63)$$

Persamaan (2.63) memberikan distribusi asimtotik MLE berikut :

$$\hat{\boldsymbol{\theta}} \overset{a}{\sim} N(\boldsymbol{\theta}_0, [\mathbf{I}(\boldsymbol{\theta}_0)]^{-1}).$$

(Pawitan, 2001)

## 2.8 Kematian Ibu dan Bayi

Program kesehatan ibu dan anak menjadi unsur sangat penting dalam pembangunan, karena dari seorang ibu akan dilahirkan calon-calon generasi penerus bangsa. Untuk itulah, tujuan pembangunan kesehatan Indonesia diarahkan untuk meningkatkan derajat kesehatan dan kualitas sumber daya manusia, yang dapat dilihat dengan upaya meningkatkan usia harapan hidup, menurunkan angka kematian ibu dan anak, meningkatkan kesejahteraan keluarga, meningkatkan produktifitas kerja, serta meningkatkan kesadaran masyarakat untuk berperilaku hidup sehat (Departemen Kesehatan Republik Indonesia, 2009).

Untuk menilai derajat kesehatan suatu bangsa WHO dan berbagai lembaga Internasional lainnya menetapkan beberapa alat ukur atau indikator, seperti morbiditas penyakit, mortalitas kelompok rawan seperti bayi, balita, dan ibu saat melahirkan. Alat ukur yang paling banyak dipakai oleh negara-negara didunia adalah Angka Kematian Ibu (AKI) dan Angka Kematian Bayi (AKB). Angka-angka ini pula yang menjadi bagian penting dalam membentuk indeks pembangunan manusia atau *Human Development Index* (HDI), yang menggambarkan tingkat kemajuan suatu bangsa.



### 2.8.1 Kematian Ibu

Kematian ibu menurut batasan dari *The Tenth Revision of The International Classification of Diseases* (ICD – 10) adalah kematian wanita yang terjadi pada saat kehamilan atau dalam 42 hari setelah berakhirnya kehamilan, tidak tergantung dari lama dan lokasi kehamilan, disebabkan oleh apapun yang berhubungan dengan kehamilan, atau yang diperberat oleh kehamilan tersebut, atau penanganannya, akan tetapi bukan kematian yang disebabkan oleh kecelakaan atau kebetulan. (World Health Organization, 2007)

Angka kematian ibu (AKI) mencerminkan risiko yang dihadapi ibu-ibu selama kehamilan, bersalin, dan nifas yang dipengaruhi oleh status gizi ibu, keadaan sosial ekonomi, keadaan kesehatan yang kurang baik menjelang kehamilan, kejadian berbagai komplikasi pada kehamilan dan kelahiran, tersedianya dan penggunaan fasilitas pelayanan kesehatan termasuk pelayanan prenatal dan obstetri. Tingginya angka kematian ibu menunjukkan keadaan sosial ekonomi yang rendah, fasilitas pelayanan kesehatan termasuk pelayanan prenatal dan obstetri yang rendah pula.

Faktor penyebab langsung kematian ibu di Indonesia masih didominasi oleh perdarahan, eklampsia, dan infeksi. Sedangkan faktor tidak langsung penyebab kematian ibu karena kasus “3 terlambat” dan “4 terlalu”. Kasus “3 terlambat” meliputi : terlambat mengenali tanda bahaya persalinan dan mengambil keputusan, terlambat dirujuk dan terlambat ditangani oleh tenaga kesehatan di fasilitas kesehatan. Sedangkan “4 terlalu”, yaitu : terlalu tua hamil, terlalu muda untuk hamil, terlalu banyak anak, dan terlalu dekat jarak antar kelahiran.

Menurut Mochtar (1998), faktor-faktor yang mempengaruhi kematian ibu dapat diuraikan sebagai berikut :

#### 1. Usia ibu saat kehamilan

Usia ibu saat hamil dan persalinan merupakan salah satu faktor resiko kematian ibu. Menurut Departemen Kesehatan Republik Indonesia (2009), kurun waktu sehat untuk kehamilan dan persalinan adalah 20-35 tahun. Risiko kematian ibu pada kelompok umur di bawah 20 tahun dan pada kelompok umur di atas 35 tahun adalah tiga kali lebih tinggi dari kelompok umur reproduksi sehat.

## 2. Paritas

Paritas adalah jumlah kehamilan yang menghasilkan janin hidup atau mati setelah viabilitas (Walsh, 2007). Ibu dengan riwayat hamil dan bersalin lebih dari empat kali dapat membahayakan kesehatan ibu dan janin. Menurut David (2007), kematian ibu dan janin akan meningkat setelah kelahiran ketiga seorang ibu.

## 3. Faktor Pelayanan Kesehatan

Salah satu penyebab kematian ibu secara tidak langsung adalah kurangnya akses ibu bersalin terhadap pelayanan kesehatan yang berkualitas. Kualitas dan efektivitas pelayanan kesehatan ibu belum memadai, sistem rujukan kesehatan maternal belum mantap, dan lemahnya manajemen kesehatan di berbagai tingkat juga menjadi faktor yang mempengaruhi kematian ibu.

## 4. Faktor *Antenatal Care*

*Antenatal care* adalah pelayanan kesehatan yang terencana berupa observasi, edukasi, dan penanganan medik untuk ibu hamil, diberikan oleh tenaga profesional dengan frekuensi kunjungan paling sesuai dengan standar pelayanan kebidanan. Bila *antenatal care* tidak dilakukan dengan baik akan berdampak terhadap status kesehatan ibu dan bayi sehingga dapat meningkatkan resiko kematian ibu dan bayi.

## 5. Faktor Penolong

Peran dari penolong persalinan adalah mengantisipasi dan menangani komplikasi yang mungkin terjadi pada ibu dan janin. Sehingga penolong persalinan yang dilakukan oleh tenaga non profesional potensial meningkatkan resiko kegagalan proses persalinan.

## 6. Faktor Sarana dan Prasarana

Sarana dan prasarana kesehatan termasuk tenaga medis yang memadai merupakan unsur penting yang mempengaruhi kematian ibu. Dengan sarana dan prasarana kesehatan yang memadai, seorang ibu hamil dapat mengakses fasilitas yang tersedia sehingga resiko yang dapat menyebabkan kematian dapat dihindari.

## 7. Faktor Sosial, Ekonomi, dan Budaya

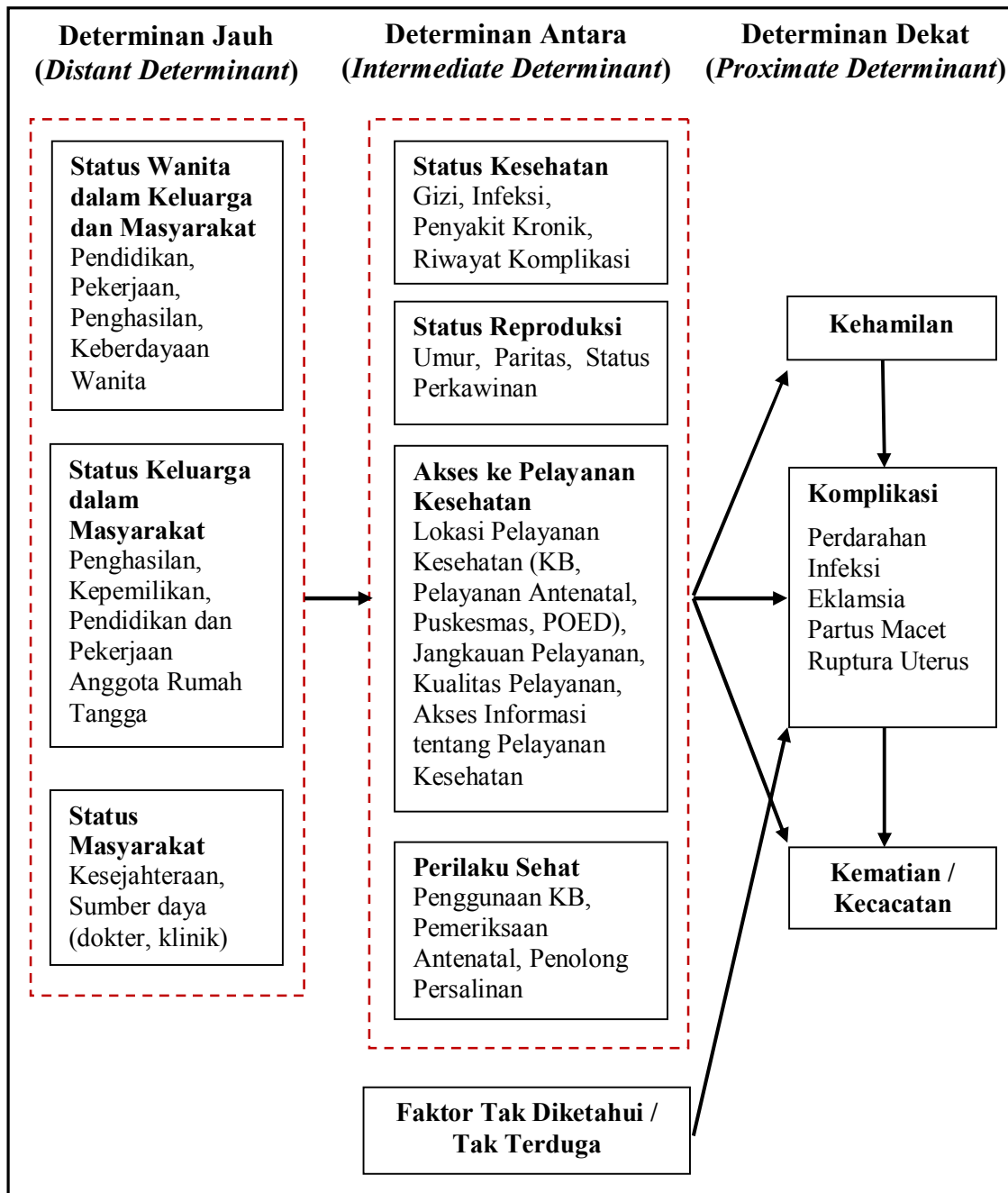
Keadaan sosial, ekonomi, dan budaya seorang ibu hamil merupakan faktor yang mempunyai peran tidak langsung terhadap kematian ibu. Kemiskinan menjadi penyebab ibu hamil kurang memperhatikan asupan gizi dan layanan kesehatan. Pendidikan ibu yang rendah menjadi sumber kurangnya pengetahuan tentang kesehatan ibu hamil. Perilaku hidup yang tidak sehat merupakan budaya masyarakat yang dapat menjadi pemicu resiko kematian ibu.

Sementara itu, McCarthy dan Maine (1992) memberikan gambaran kerangka teoritis tentang faktor – faktor yang mempengaruhi kematian ibu yang dibagi menjadi faktor- faktor determinan dekat, determinan antara dan determinan jauh. Determinasi dekat merupakan faktor yang terjadi selama kehamilan, misalnya terjadinya komplikasi pada masa kehamilan, persalinan maupun nifas.

Determinan antara merupakan faktor tentang keadaan/status ibu hamil yang meliputi : status kesehatan ibu (misalnya: status gizi, riwayat penyakit), status reproduksi (misalnya: usia, paritas, jarak kehamilan), pelayanan kesehatan (misalnya: akses layanan, kualitas pelayanan, akses informasi tentang pelayanan kesehatan), perilaku kesehatan (misalnya: perilaku KB, pemeriksaan antenatal, penolong persalinan).

Determinan jauh merupakan faktor yang secara tidak langsung mempengaruhi kematian ibu yang meliputi: status ibu dalam keluarga dan masyarakat (misalnya: pendidikan, pekerjaan, pendapatan), status keluarga dalam masyarakat (misalnya: pendapatan keluarga, tempat tinggal, pendidikan anggota keluarga, pekerjaan anggota keluarga) dan status masyarakat (misalnya: kesejahteraan, sumber daya di masyarakat).

Kerangka teoritis determinan kematian ibu menurut McCarthy dan Maine (1992) disajikan pada Gambar 2.4.



Gambar 2.4 Kerangka Teoritis Determinan Kematian Ibu  
(Mc Carthy dan Maine, 1992)

### 2.8.2 Kematian Bayi

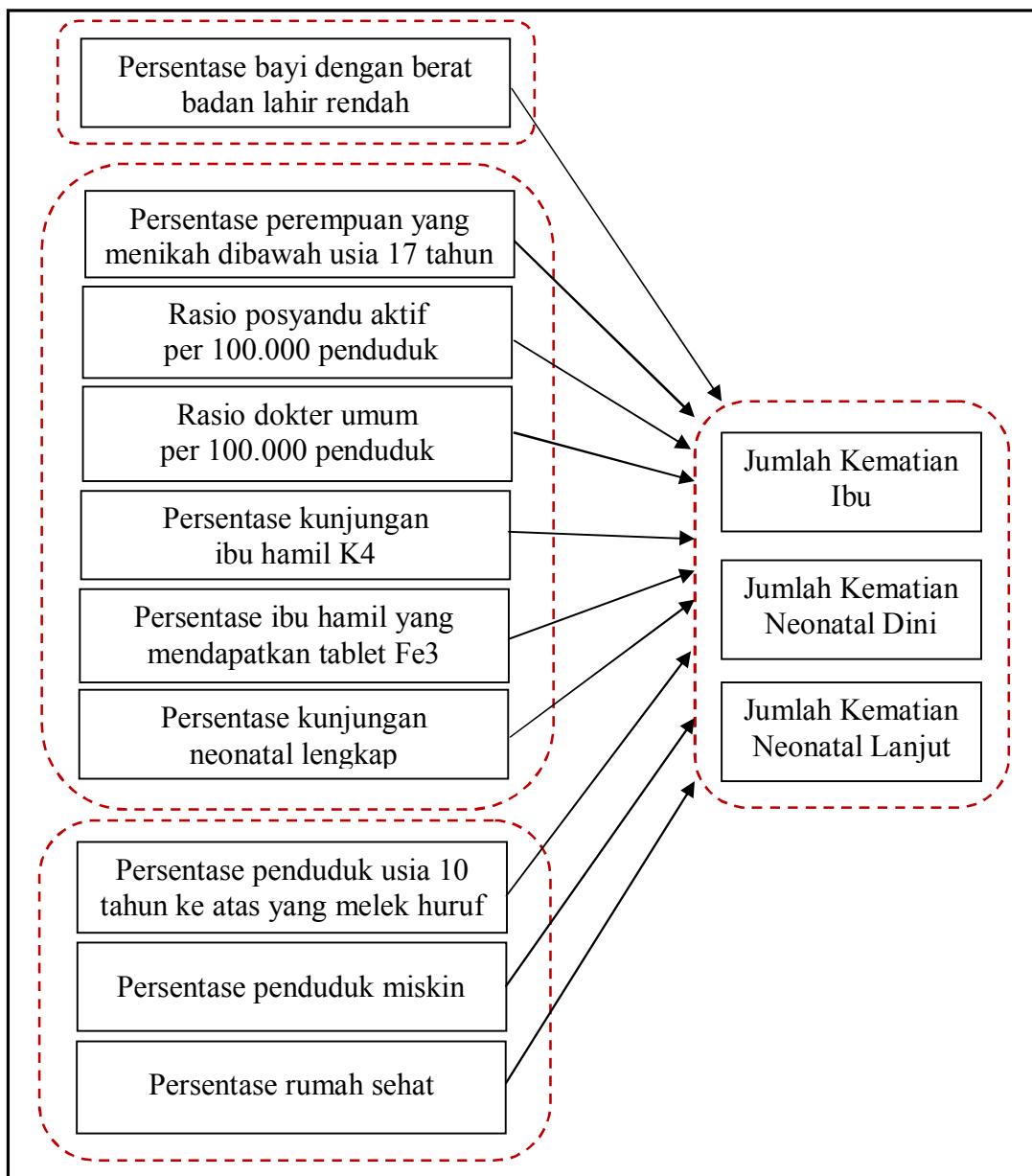
Kematian bayi didefinisikan sebagai kematian yang terjadi saat setelah bayi lahir sampai bayi belum berusia tepat satu tahun. Periode kematian bayi dibagi menjadi tiga tahapan, yaitu :

- kematian neonatal dini, yaitu kematian seorang bayi yang dilahirkan hidup dalam 7 hari setelah kelahiran.
- kematian neonatal lanjut, yaitu kematian seorang bayi yang dilahirkan hidup lebih dari 7 hari sampai 28 hari.
- Kematian pasca neonatal, yaitu kematian seorang bayi yang dilahirkan hidup lebih dari 1 bulan sampai 11 bulan.

Menurut Rutstein (2000), kematian neonatal yang mencakup neonatal dini dan neonatal lanjut memberikan kontribusi besar pada kematian bayi, dimana sekitar 2/3 kematian bayi terjadi pada periode neonatal atau bulan pertama setelah kelahiran. Secara garis besar, penyebab kematian bayi ada dua macam yaitu endogen dan eksogen. Penyebab kematian bayi endogen terjadi karena faktor-faktor yang dibawa anak sejak lahir, yang diperoleh dari orang tuanya pada saat konsepsi atau didapat selama kehamilan dan umumnya menjadi penyebab kematian neonatal. Menurut Direktorat Jenderal Pembinaan Kesehatan Masyarakat (1997), kematian bayi pada masa neonatal terutama disebabkan oleh tetanus neonatorum dan gangguan perinatal sebagai akibat dari kehamilan risiko tinggi seperti asfiksia, bayi dengan berat badan lahir rendah, dan trauma lahir. Asfiksia neonatorum ialah keadaan dimana bayi tidak dapat segera bernafas secara spontan dan teratur setelah lahir. Masalah ini erat hubungannya dengan gangguan kesehatan ibu hamil, kelainan tali pusat, atau masalah yang mempengaruhi kesejahteraan bayi selama atau sesudah persalinan. Sedangkan bayi dengan berat badan lahir rendah (BBLR) mencerminkan hasil perkembangan dalam kandungan dan kecukupan nutrisi bayi saat dilahirkan. Bayi dikatakan memiliki berat lahir rendah apabila memiliki berat badan kurang dari 2500gr. Beberapa faktor yang menyebabkan BBLR antara lain : ibu hamil dengan gizi yang kurang, usia ibu hamil, jarak kehamilan yang terlalu dekat, paritas ibu, dan beberapa penyakit bawaan ibu hamil. Sementara itu, penyebab kematian bayi eksogen terjadi karena faktor-faktor yang bertalian dengan pengaruh lingkungan luar dan biasanya menjadi penyebab kematian pasca neonatal, yaitu kematian bayi yang terjadi setelah usia satu bulan sampai menjelang usia satu tahun.

## 2.9 Kerangka Konseptual Determinan Kematian Ibu, Neonatal Dini, dan Neonatal Lanjut

Berdasarkan kajian teori tentang faktor-faktor yang mempengaruhi kematian ibu dan memperhatikan keterkaitannya dengan kematian neonatal, maka kerangka konseptual yang menggambarkan variabel-variabel yang akan diukur atau diamati dalam penelitian ini disajikan pada Gambar 2.5.



Gambar 2.5 Kerangka Konseptual Determinan Kematian Ibu, Neonatal Dini, dan Neonatal Lanjut.

## **BAB III**

### **METODE PENELITIAN**

Untuk memperoleh hasil penelitian sesuai dengan tujuannya, maka tahapan penelitian ini dibagi menjadi dua, yaitu: tahap 1 tentang pengembangan teori, dilanjutkan tahap 2 tentang penerapan hasil pengembangan teori untuk pemodelan jumlah kematian ibu, neonatal dini, dan neonatal lanjut di Provinsi Jawa Tengah.

#### **3.1 Tahap 1 (Pengembangan Teori)**

Dalam penelitian ini dikembangkan model *multivariate Poisson regression* (MPR) dan *geographically weighted multivariate Poisson regression* (GWMPR). Metode penelitian dilakukan dengan mengkaji berbagai literatur terkait, baik yang tersajikan dalam forum ilmiah atau yang telah dipublikasikan dalam bentuk jurnal maupun buku. Berdasarkan hasil kajian kritis tersebut dilakukan pengembangan sedemikian hingga diperoleh suatu temuan model atau teori baru.

Kajian literatur dalam penelitian ini dimulai dengan membandingkan berbagai model distribusi Poisson multivariat, sehingga dipilih model yang dibentuk berdasarkan *(p+1)-variate reduction method* dengan fungsi probabilitas bersama dituliskan pada persamaan (2.9). Kajian kritis selanjutnya tentang regresi Poisson yang memuat heterogenitas spasial, yaitu model GWPR yang tersaji pada persamaan (2.26). Berkaitan adanya keterbatasan model hanya pada kasus univariat, maka pengembangan model dalam penelitian ini dilakukan untuk kasus multivariat, yaitu model MPR dan GWMPR, dimana keduanya untuk model dengan kovariansi merupakan konstanta dan kovariansi merupakan fungsi variabel bebas serta ukuran populasi yang berbeda.

Berdasarkan model MPR dan GWMPR yang dikembangkan, ditentukan estimasi parameter dan statistik uji, sebagai berikut:

### 3.1.1 Estimasi Parameter Model MPR

Estimasi parameter model MPR, baik untuk kovariansi merupakan konstanta maupun kovariansi merupakan fungsi variabel bebas dilakukan dengan metode MLE melalui tahapan sebagai berikut :

1. Menentukan model MPR, baik untuk kovariansi merupakan suatu konstanta maupun kovariansi merupakan fungsi dari variabel bebas.
2. Menentukan fungsi likelihood model MPR

$$L(\lambda_0, \beta) = \prod_{i=1}^n f(y_i | \lambda_0, \beta).$$

3. Menentukan fungsi log-likelihood model MPR

$$l(\lambda_0, \beta) = \sum_{i=1}^n \ln f(y_i | \lambda_0, \beta).$$

4. Memaksimumkan fungsi log-likelihood, yaitu dengan menentukan penyelesaian dari  $l(\lambda_0, \beta)$  diturunkan terhadap masing-masing parameter model dan disamakan dengan nol.

5. Menentukan estimasi parameter melalui proses iterasi *Newton-Raphson*

- a. Menentukan nilai awal untuk masing-masing parameter

- Model MPR dengan kovariansi merupakan konstanta

$$\hat{\lambda}_{0(0)} = \widehat{\text{cov}}[y_h^*, y_g^*]; h, g = 1, 2, \dots, p; h \neq g.$$

$$\hat{\beta}_{h(0)} = (\mathbf{X}^T \mathbf{X})^{-1} \mathbf{X}^T \mathbf{y}_h^*,$$

dimana

$\mathbf{y}_h^* = [y_{h1}^* \ y_{h2}^* \ \dots \ y_{hn}^*]^T$  adalah vektor variabel respon baru dengan elemen sebagai berikut :

$$y_{hi}^* = \begin{cases} \ln(y_{hi}/s_i) & ; y_{hi} = 1, 2, 3, \dots \\ 0 & ; y_{hi} = 0 \end{cases}$$

- Model MPR dengan kovariansi merupakan fungsi variabel bebas

$$\hat{\beta}_{0(0)} = (\mathbf{X}^T \mathbf{X})^{-1} \mathbf{X}^T \mathbf{y}_0^*,$$

dimana,  $\mathbf{y}_0^* = \hat{E}[\mathbf{y}_0 | \mathbf{y}_h, \theta]$ .

$$\hat{\beta}_{h(0)} = (\mathbf{X}^T \mathbf{X})^{-1} \mathbf{X}^T \mathbf{y}_h^*.$$



- b. Menentukan vektor gradien  $\mathbf{g}(\hat{\boldsymbol{\theta}}_{(t)})$  dengan elemen vektor diperoleh dari turunan pertama fungsi log-likelihood terhadap masing-masing parameter model.
- c. Menentukan matriks Hessian  $\mathbf{H}(\hat{\boldsymbol{\theta}}_{(t)})$  dengan elemen matriks merupakan turunan parsial kedua dari fungsi log-likelihood terhadap kombinasi masing-masing parameter model.
- d. Melakukan proses iterasi *Newton Raphson* dengan formula
$$\hat{\boldsymbol{\theta}}_{(t+1)} = \hat{\boldsymbol{\theta}}_{(t)} - \mathbf{H}^{-1}(\hat{\boldsymbol{\theta}}_{(t)})\mathbf{g}(\hat{\boldsymbol{\theta}}_{(t)}).$$
- e. Iterasi dihentikan jika  $\|\hat{\boldsymbol{\theta}}_{(t+1)} - \hat{\boldsymbol{\theta}}_{(t)}\| \leq \varepsilon$ , dengan  $\varepsilon$  bilangan riil positif yang sangat kecil.

### 3.1.2 Estimasi Parameter Model GWMPR

Menentukan estimasi parameter dari model GWMPR, baik untuk kovariansi merupakan konstanta maupun kovariansi merupakan fungsi dari variabel bebas dilakukan dengan metode MLE dengan tahapan sebagai berikut :

1. Menentukan model GWMPR, baik untuk kovariansi merupakan konstanta maupun kovariansi merupakan fungsi dari variabel bebas.
2. Menentukan fungsi likelihood lokasi ke- $i$  model GWMPR

$$L(\lambda_0(\mathbf{u}_i), \boldsymbol{\beta}(\mathbf{u}_i)) = \prod_{j=1}^n f(\mathbf{y}_j | \lambda_0(\mathbf{u}_i), \boldsymbol{\beta}(\mathbf{u}_i)).$$

3. Menentukan fungsi log-likelihood lokasi ke- $i$  model GWMPR

$$l(\lambda_0(\mathbf{u}_i), \boldsymbol{\beta}(\mathbf{u}_i)) = \sum_{j=1}^n \ln f(\mathbf{y}_j | \lambda_0(\mathbf{u}_i), \boldsymbol{\beta}(\mathbf{u}_i)).$$

4. Menentukan pembobot lokasi ke- $i$  dengan lokasi ke- $j$  ( $i, j=1,2,\dots,n; i \neq j$ ) yang diformulasikan sebagai :

$$w_{ij} = \exp \left[ -\frac{1}{2} \left( \frac{d_{ij}}{b_i} \right)^2 \right],$$

$$\text{dimana } d_{ij} = \sqrt{(u_i - u_j)^2 + (v_i - v_j)^2}.$$

Sedangkan *bandwidth* optimum lokasi ke- $i$  ( $b_i$ ) ditentukan dengan metode *generalized cross-validation* (GCV) yang diformulasikan sebagai :

$$GCV(b_i) = \frac{np \sum_{i=1}^n (\mathbf{y}_i - \hat{\mathbf{y}}_i(b_i))^T (\mathbf{y}_i - \hat{\mathbf{y}}_i(b_i))}{(np - K)^2}.$$

5. Menentukan fungsi log-likelihood terboboti model GWMPR, yaitu :

$$\mathbb{Q} = \sum_{j=1}^n w_{ij} \ln f(\mathbf{y}_j | \lambda_0(\mathbf{u}_i), \boldsymbol{\beta}(\mathbf{u}_i)).$$

6. Memaksimumkan fungsi log-likelihood terboboti, yaitu dengan menentukan penyelesaian dari  $\mathbb{Q}$  diturunkan terhadap masing-masing parameter dan disamakan dengan nol.
7. Menentukan estimasi parameter melalui proses iterasi *Newton-Raphson*
- a. Menentukan nilai awal untuk masing-masing parameter.

- Model GWMPR dengan kovariansi merupakan konstanta

$$\hat{\lambda}_{0(0)} = \widehat{\text{cov}}[\mathbf{y}_h^*, \mathbf{y}_g^*]; h, g = 1, 2, \dots, p; h \neq g.$$

$$\hat{\boldsymbol{\beta}}_{h(0)} = (\mathbf{X}^T \mathbf{X})^{-1} \mathbf{X}^T \mathbf{y}_h^*,$$

dimana,

$\mathbf{y}_h^* = [y_{h1}^* \ y_{h2}^* \ \dots \ y_{hn}^*]^T$  adalah vektor variabel respon baru dengan elemen sebagai berikut :

$$y_{hi}^* = \begin{cases} \ln(y_{hi}/s_i) & ; y_{hi} = 1, 2, 3, \dots \\ 0 & ; y_{hi} = 0 \end{cases}$$

- Model GWMPR dengan kovariansi merupakan fungsi variabel bebas

$$\hat{\boldsymbol{\beta}}_{0(0)} = (\mathbf{X}^T \mathbf{X})^{-1} \mathbf{X}^T \mathbf{y}_0^*,$$

dimana,  $\mathbf{y}_0^* = \hat{E}[\mathbf{y}_0 | \mathbf{y}_h, \boldsymbol{\theta}]$ .

$$\hat{\boldsymbol{\beta}}_{h(0)} = (\mathbf{X}^T \mathbf{X})^{-1} \mathbf{X}^T \mathbf{y}_h^*.$$

- b. Menentukan vektor gradien  $\mathbf{g}(\hat{\boldsymbol{\theta}}_{(i)}(\mathbf{u}_i))$  dengan elemen vektor merupakan turunan pertama dari fungsi log-likelihood yang terboboti terhadap masing-masing parameter model.
- c. Menentukan matriks Hessian  $\mathbf{H}(\hat{\boldsymbol{\theta}}_{(i)}(\mathbf{u}_i))$  dengan elemen matriks merupakan turunan parsial kedua dari fungsi log-likelihood yang terboboti terhadap kombinasi masing-masing parameter model.

- d. Melakukan proses iterasi *Newton-Raphson* dengan formula:

$$\hat{\boldsymbol{\theta}}_{(t+1)}(\mathbf{u}_i) = \hat{\boldsymbol{\theta}}_{(t)}(\mathbf{u}_i) - \mathbf{H}^{-1}(\hat{\boldsymbol{\theta}}_{(t)}(\mathbf{u}_i))\mathbf{g}(\hat{\boldsymbol{\theta}}_{(t)}(\mathbf{u}_i))$$

- e. Iterasi dihentikan jika  $\|\hat{\boldsymbol{\theta}}_{(t+1)}(\mathbf{u}_i) - \hat{\boldsymbol{\theta}}_{(t)}(\mathbf{u}_i)\| \leq \varepsilon$ , dengan  $\varepsilon$  bilangan riil positif yang sangat kecil.

### 3.1.3 Uji Hipotesis Model MPR

Pengujian hipotesis dari model MPR, baik untuk kovariansi merupakan konstanta maupun kovariansi merupakan fungsi dari variabel bebas, dilakukan untuk uji serentak dan uji parsial parameter model. Untuk menentukan statistik uji dan distribusinya dengan menggunakan metode LRT melalui tahapan sebagai berikut :

#### a. Uji serentak parameter regresi

1. Model MPR dengan kovariansi merupakan konstanta

- Formulasi Hipotesis

$$H_0 : \beta_{h1} = \beta_{h2} = \dots = \beta_{hk} = 0 \quad ; h = 1, 2, \dots, p$$

$$H_1 : \text{paling sedikit ada satu } \beta_{hl} \neq 0 \quad ; h = 1, 2, \dots, p \quad ; l = 1, 2, \dots, k$$

- Mendefinisikan himpunan parameter-parameter di bawah  $H_0$

$$\omega_1 = \{\lambda_{00}, \beta_{h0} \quad ; h = 1, 2, \dots, p\}$$

- Menentukan maksimum fungsi likelihood

$$L(\hat{\boldsymbol{\theta}}_{102}) = \text{maks } L(\omega_1)$$

- Mendefinisikan himpunan parameter di bawah populasi

$$\Omega_1 = \{\lambda_0, \boldsymbol{\beta}_h \quad ; h = 1, 2, \dots, p\}$$

- Menentukan maksimum fungsi likelihood

$$L(\hat{\boldsymbol{\theta}}_1) = \text{maks } L(\Omega_1)$$

- Menentukan statistik uji

$$G_1 = 2[\ln L(\hat{\boldsymbol{\theta}}_1) - \ln L(\hat{\boldsymbol{\theta}}_{102})]$$

- Menentukan distribusi dari  $G_1$

- Menentukan daerah kritis pengujian hipotesis.

2. Model MPR dengan kovariansi merupakan fungsi variabel bebas

- Formulasi Hipotesis

$$H_0 : \beta_{c1} = \beta_{c2} = \dots = \beta_{ck} = 0 \quad ; \quad c = 0, 1, 2, \dots, p$$

$$H_1 : \text{paling sedikit ada satu } \beta_{cl} \neq 0 \quad ; \quad c = 0, 1, 2, \dots, p \quad ; \quad l = 1, 2, \dots, k$$

- Mendefinisikan himpunan parameter-parameter di bawah  $H_0$

$$\omega_2 = \{\beta_{00}, \beta_{h0} \ ; \ h = 1, 2, \dots, p\}$$

- Menentukan maksimum fungsi likelihood

$$L(\hat{\theta}_{202}) = \text{maks } L(\omega_2)$$

- Mendefinisikan himpunan parameter di bawah populasi

$$\Omega_2 = \{\beta_0, \beta_h \ ; \ h = 1, 2, \dots, p\}$$

- Menentukan maksimum fungsi likelihood

$$L(\hat{\theta}_2) = \text{maks } L(\Omega_2)$$

- Menentukan statistik uji

$$G_2 = 2[\ln L(\hat{\theta}_2) - \ln L(\hat{\theta}_{202})]$$

- Menentukan distribusi dari  $G_2$
- Menentukan daerah kritis pengujian hipotesis.

**b. Uji parsial parameter regresi**

1. Model MPR dengan kovariansi merupakan konstanta

- Formulasi Hipotesis

$$H_0 : \beta_{ml} = 0$$

$$H_1 : \beta_{ml} \neq 0$$

- Mendefinisikan himpunan parameter-parameter di bawah  $H_0$

$$\omega_{11} = \{\lambda_{00}, \beta_{h0}, \beta_{h1}, \dots, \beta_{m(l-1)}, \beta_{m(l+1)}, \dots, \beta_{hk} \ ; \ h = 1, 2, \dots, p\}$$

- Menentukan maksimum fungsi likelihood

$$L(\hat{\theta}_{104}) = \text{maks } L(\omega_{11})$$

- Mendefinisikan himpunan parameter di bawah populasi

$$\Omega_1 = \{\lambda_0, \beta_h \ ; \ h = 1, 2, \dots, p\}$$

- Menentukan maksimum fungsi likelihood

$$L(\hat{\theta}_1) = \text{maks } L(\Omega_1)$$

- Menentukan statistik uji

$$G_{11} = 2[\ln L(\hat{\theta}_1) - \ln L(\hat{\theta}_{104})]$$

- Menentukan distribusi dari  $G_{11}$
- Menentukan daerah kritis pengujian hipotesis.

## 2. Kovariansi merupakan fungsi variabel bebas

- Formulasi Hipotesis

$$H_0 : \beta_{ml} = 0$$

$$H_1 : \beta_{ml} \neq 0$$

- Mendefinisikan himpunan parameter-parameter di bawah  $H_0$

$$\omega_{22} = \{\beta_{c0}, \beta_{c1}, \dots, \beta_{m(l-1)}, \beta_{m(l+1)}, \dots, \beta_{ck} ; c = 0, 1, 2, \dots, p\}$$

- Menentukan maksimum fungsi likelihood

$$L(\hat{\theta}_{204}) = \text{maks } L(\omega_{22})$$

- Mendefinisikan himpunan parameter di bawah populasi

$$\Omega_2 = \{\beta_0, \beta_h ; h = 1, 2, \dots, p\}$$

- Menentukan maksimum fungsi likelihood

$$L(\hat{\theta}_2) = \text{maks } L(\Omega_2)$$

- Menentukan statistik uji

$$G_{22} = 2[\ln L(\hat{\theta}_2) - \ln L(\hat{\theta}_{204})]$$

- Menentukan distribusi dari  $G_{22}$
- Menentukan daerah kritis pengujian hipotesis

### 3.1.4 Uji Hipotesis Model GWMPR

Pengujian hipotesis dari model GWMPR, baik untuk kovariansi merupakan konstanta maupun kovariansi merupakan fungsi variabel bebas, dilakukan untuk kesamaan GWMPR dan MPR, uji serentak, dan uji parsial

parameter model. Untuk menentukan statistik uji dan distribusinya dengan menggunakan metode LRT melalui tahapan sebagai berikut :

**a. Uji serentak parameter regresi**

1. Model GWMPR dengan kovariansi merupakan konstanta

- Formulasi Hipotesis

$$H_0 : \beta_{h1}(\mathbf{u}_i) = \beta_{h2}(\mathbf{u}_i) = \dots = \beta_{hk}(\mathbf{u}_i) = 0 ; h=1,2,\dots,p ; i=1,2,\dots,n$$

$$H_1 : \text{paling sedikit ada satu } \beta_{hl}(\mathbf{u}_i) \neq 0 ; l=1,2,\dots,k$$

- Mendefinisikan himpunan parameter-parameter di bawah  $H_0$

$$\omega_3 = \{ \lambda_{00}(\mathbf{u}_i), \beta_{h0}(\mathbf{u}_i) ; h=1,2,\dots,p ; i=1,2,\dots,n \}$$

- Menentukan maksimum fungsi likelihood

$$L(\hat{\boldsymbol{\theta}}_{302}) = \text{maks } L(\omega_3)$$

- Mendefinisikan himpunan parameter di bawah populasi

$$\Omega_3 = \{ \lambda_0(\mathbf{u}_i); \boldsymbol{\beta}_h(\mathbf{u}_i); h=1,2,\dots,p; i=1,2,\dots,n \}$$

- Menentukan maksimum fungsi likelihood

$$L(\hat{\boldsymbol{\theta}}_3) = \text{maks } L(\Omega_3)$$

- Menentukan statistik uji

$$G_3 = 2[\ln L(\hat{\boldsymbol{\theta}}_3) - \ln L(\hat{\boldsymbol{\theta}}_{302})]$$

- Menentukan distribusi dari  $G_3$
- Menentukan daerah kritis pengujian hipotesis

2. Model GWMPR dengan kovariansi merupakan fungsi variabel bebas

- Formulasi Hipotesis

$$H_0 : \beta_{c1}(\mathbf{u}_i) = \beta_{c2}(\mathbf{u}_i) = \dots = \beta_{ck}(\mathbf{u}_i) = 0 ; c=0,1,2,\dots,p ; i=1,2,\dots,n$$

$$H_1 : \text{paling sedikit ada satu } \beta_{cl}(\mathbf{u}_i) \neq 0 ; l=1,2,\dots,k$$

- Mendefinisikan himpunan parameter-parameter di bawah  $H_0$

$$\omega_4 = \{ \beta_{00}(\mathbf{u}_i), \beta_{h0}(\mathbf{u}_i) ; h=1,2,\dots,p ; i=1,2,\dots,n \}$$

- Menentukan maksimum fungsi likelihood

$$L(\hat{\boldsymbol{\theta}}_{402}) = \text{maks } L(\omega_4)$$

- Mendefinisikan himpunan parameter di bawah populasi

$$\Omega_4 = \{\beta_0(\mathbf{u}_i), \beta_h(\mathbf{u}_i) ; h=1,2,\dots,p ; i=1,2,\dots,n\}$$

- Menentukan maksimum fungsi likelihood

$$L(\hat{\theta}_4) = \text{maks } L(\Omega_4)$$

- Menentukan statistik uji

$$G_4 = 2[\ln L(\hat{\theta}_4) - \ln L(\hat{\theta}_{402})]$$

- Menentukan distribusi dari  $G_4$
- Menentukan daerah kritis pengujian hipotesis

### c. Uji parsial parameter regresi

1. Model GWMPR dengan kovariansi merupakan konstanta

- Formulasi Hipotesis

$$H_0 : \beta_{ml}(\mathbf{u}_j) = 0$$

$$H_1 : \beta_{ml}(\mathbf{u}_j) \neq 0$$

- Mendefinisikan himpunan parameter-parameter di bawah  $H_0$

$$\omega_{33} = \{\lambda_{00}(\mathbf{u}_i), \beta_{h0}(\mathbf{u}_i), \beta_{h1}(\mathbf{u}_i), \dots, \beta_{m(l-1)}(\mathbf{u}_j), \beta_{m(l+1)}(\mathbf{u}_j), \dots, \beta_{hk}(\mathbf{u}_i) ; \\ h=1,2,\dots,p ; i=1,2,\dots,n\}$$

- Menentukan maksimum fungsi likelihood

$$L(\hat{\theta}_{304}) = \text{maks } L(\omega_{33})$$

- Mendefinisikan himpunan parameter di bawah populasi

$$\Omega_3 = \{\lambda_0(\mathbf{u}_i), \beta_h(\mathbf{u}_i) ; h=1,2,\dots,p ; i=1,2,\dots,n\}$$

- Menentukan maksimum fungsi likelihood

$$L(\hat{\theta}_3) = \text{maks } L(\Omega_3)$$

- Menentukan statistik uji

$$G_{33} = 2[\ln L(\hat{\theta}_3) - \ln L(\hat{\theta}_{304})]$$

- Menentukan distribusi dari  $G_{33}$
- Menentukan daerah kritis pengujian hipotesis

## 2. Model GWMPR dengan kovariansi merupakan fungsi variabel bebas

- Formulasi Hipotesis

$$H_0 : \beta_{ml}(\mathbf{u}_j) = 0$$

$$H_1 : \beta_{ml}(\mathbf{u}_j) \neq 0$$

- Mendefinisikan himpunan parameter-parameter di bawah  $H_0$

$$\omega_{44} = \{ \beta_{c0}(\mathbf{u}_i), \beta_{c1}(\mathbf{u}_i), \dots, \beta_{m(l-1)}(\mathbf{u}_j), \beta_{m(l+1)}(\mathbf{u}_j), \dots, \beta_{ck}(\mathbf{u}_i) ; \\ c = 0, 1, 2, \dots, p ; i = 1, 2, \dots, n \}$$

- Menentukan maksimum fungsi likelihood

$$L(\hat{\theta}_{404}) = \text{maks } L(\omega_{44})$$

- Mendefinisikan himpunan parameter di bawah populasi

$$\Omega_4 = \{ \beta_0(\mathbf{u}_i), \beta_h(\mathbf{u}_i) ; h = 1, 2, \dots, p ; i = 1, 2, \dots, n \}$$

- Menentukan maksimum fungsi likelihood

$$L(\hat{\theta}_4) = \text{maks } L(\Omega_4)$$

- Menentukan statistik uji

$$G_{44} = 2[\ln L(\hat{\theta}_4) - \ln L(\hat{\theta}_{404})]$$

- Menentukan distribusi dari  $G_{44}$
- Menentukan daerah kritis pengujian hipotesis

### 3.2. Penelitian Aplikatif

Aplikasi dalam penelitian ini dilakukan untuk menentukan model regresi spasial “terbaik” mengenai faktor-faktor yang mempengaruhi jumlah kematian ibu, neonatal dini, dan neonatal lanjut di Provinsi Jawa Tengah. Untuk keperluan tersebut dilakukan analisis data dengan memanfaatkan model MPR dan GWMPR yang telah dikembangkan. Metodologi penelitiannya dapat diuraikan sebagai berikut :

#### 3.2.1 Sumber Data

Pada penelitian ini, data yang digunakan adalah data sekunder yang bersumber dari Dinas Kesehatan Provinsi Jawa Tengah (2014). Data yang diambil berupa data jumlah kematian ibu dan bayi (neonatal dini, neonatal lanjut) sebagai variabel respon serta beberapa variabel bebas yang diperkirakan



mempengaruhi angka kematian tersebut, yang secara garis besar dikelompokkan dalam beberapa faktor, yaitu: sosial ekonomi masyarakat, fasilitas layanan kesehatan, tenaga kesehatan, dan kesadaran masyarakat berperilaku hidup bersih dan sehat. Selain itu juga data mengenai letak astronomi tiap kabupaten/kota. Pada penelitian ini unit observasi yang digunakan adalah kabupaten/kota di Provinsi Jawa Tengah yang terdiri atas 35 kabupaten/kota.

### **3.2.2 Gambaran Umum Provinsi Jawa Tengah**

Provinsi Jawa Tengah merupakan salah satu provinsi di Indonesia yang terletak cukup strategis karena berbatasan dengan tiga provinsi besar, yaitu : bagian barat berbatasan dengan Provinsi Jawa Barat, bagian timur berbatasan dengan Provinsi Jawa Timur, dan berbatasan dengan Provinsi Daerah Istimewa Yogyakarta di sebagian wilayah selatan. Provinsi Jawa Tengah juga berbatasan langsung dengan dua laut, yaitu : Laut Jawa di bagian utara dan Samudra Hindia di bagian selatan. Secara geografis Provinsi Jawa Tengah terletak antara 5°40' dan 8°30' lintang selatan dan antara 108° 30' dan 111° 30' bujur timur, dengan luas wilayah sebesar 32.544,12 km<sup>2</sup>. Wilayah terluas adalah Kabupaten Cilacap dengan luas 2.138,51 km<sup>2</sup>, atau sekitar 6,57% dari luas total Provinsi Jawa Tengah, sedangkan Kota Magelang merupakan wilayah dengan luas paling kecil, yaitu : 18,12 km<sup>2</sup>.

Secara administratif Provinsi Jawa Tengah terbagi menjadi 29 kabupaten dan 6 kota, yang terdistribusi menjadi 573 kecamatan dan 8.576 desa/kelurahan. Berdasarkan data dari Badan Pusat Statistik (BPS) Provinsi Jawa Tengah, jumlah penduduk Provinsi Jawa Tengah pada tahun 2013 sebesar 33.264.339 jiwa, dengan jumlah penduduk terbanyak di Kabupaten Brebes sebesar 1.764.648 jiwa (5,30%) dan paling sedikit di Kota Magelang sebesar 119.935 jiwa (0,36%).

Untuk akses layanan kesehatan, baik berupa fasilitas kesehatan maupun tenaga medis di beberapa kabupaten/kota di Provinsi Jawa Tengah masih perlu mendapat perhatian. Jumlah puskesmas yang telah terdaftar sebesar 873, sehingga 1 puskesmas logikanya harus dapat melayani sebesar 38.103 penduduk. Rasio puskesmas per 100.000 penduduk tertinggi terdapat di Kota Pekalongan sebesar 4,22 dan terendah di Kabupaten Sukoharjo sebesar 1,44. Sementara itu untuk

tenaga medis, rasio dokter umum per 100.000 penduduk kabupaten/kota di Provinsi Jawa Tengah berkisar 27,8. Rasio tertinggi di Kota Surakarta sebesar 162,7 dan rasio terendah di Kabupaten Brebes sebesar 10,3. Berdasarkan target indikator Indonesia sehat, rasio dokter adalah 40 per 100.000 penduduk dan 80% kabupaten/kota di Provinsi Jawa Tengah belum mencapai target tersebut. Rasio bidan per 100.000 penduduk kabupaten/kota di Provinsi Jawa Tengah berkisar 51,4. Rasio tertinggi di Kabupaten Purworejo sebesar 123,4 dan terendah di Kota Semarang sebesar 30,8. Berdasarkan target indikator Indonesia sehat, rasio bidan adalah 100 per 100.000 penduduk dan 97% kabupaten/kota di Provinsi Jawa Tengah belum memenuhi target tersebut. Peta administratif Provinsi Jawa Tengah disajikan pada Gambar 3.1.



Gambar 3.1 Peta Administratif Provinsi Jawa Tengah

### 3.2.3 Variabel Penelitian

Dalam penelitian ini, variabel-variabel yang digunakan terdiri dari tiga variabel respon dan sepuluh variabel bebas. Variabel dan definisi operasional dari variabel respon dan variabel bebas berturut-turut disajikan pada Tabel 3.1 dan Tabel 3.2.

Tabel 3.1 Definisi Operasional dari Variabel Respon

Variabel	Simbol	Definisi Operasional
Jumlah kematian ibu	$Y_1$	Jumlah ibu yang meninggal pada saat hamil, bersalin dan nifas untuk setiap kabupaten/kota di Provinsi Jawa tengah pada tahun 2013
Jumlah kematian neonatal dini	$Y_2$	Jumlah bayi usia 0-6 hari yang meninggal untuk setiap kabupaten/kota di Provinsi Jawa tengah pada tahun 2013
Jumlah kematian neonatal lanjut	$Y_3$	Jumlah bayi usia 7-28 hari yang meninggal untuk setiap kabupaten/kota di Provinsi Jawa tengah pada tahun 2013

Tabel 3.2 Definisi Operasional dari Variabel Bebas

Variabel	Simbol	Definisi Operasional
Persentase kunjungan ibu hamil K4	$X_1$	Persentase ibu hamil yang mendapatkan pelayanan antenatal paling sedikit empat kali sesuai standar (yaitu: satu kali pada trimester pertama, satu kali pada trimester kedua, dan dua kali pada trimester ketiga umur kehamilan) untuk setiap kabupaten/kota di Provinsi Jawa Tengah pada tahun 2013.
Persentase ibu hamil yang mendapatkan tablet Fe3	$X_2$	Persentase ibu hamil yang mendapat minimal 90 tablet Fe (suplemen zat besi) selama periode kehamilan untuk setiap kabupaten/kota di Provinsi Jawa Tengah pada tahun 2013.
Persentase kunjungan neonatal lengkap	$X_3$	Persentase bayi yang memperoleh pelayanan kunjungan neonatal minimal tiga kali sesuai standar (yaitu : satu kali pada usia 6 - 48 jam, satu kali pada 3 - 7 hari, dan 1satu kali pada 8 - 28 hari) untuk setiap kabupaten/kota di Provinsi Jawa Tengah pada tahun 2013.
Persentase bayi dengan berat badan lahir rendah	$X_4$	Persentase bayi dengan berat lahir kurang dari 2500 gram untuk setiap kabupaten/kota di Provinsi Jawa Tengah pada tahun 2013.

Tabel 3.2 Definisi Operasional dari Variabel Bebas (Lanjutan)

Variabel	Simbol	Definisi Operasional
Persentase rumah sehat	X <sub>5</sub>	Persentase rumah yang memenuhi kriteria minimal kesehatan (yaitu: akses air minum, akses jamban sehat, lantai, ventilasi, dan pencahayaan) untuk setiap kabupaten/kota di Provinsi Jawa Tengah pada tahun 2013.
Rasio posyandu aktif per 100.000 penduduk	X <sub>6</sub>	Rasio posyandu purnama atau mandiri ( sudah dapat melaksanakan kegiatan lebih dari 8 kali per tahun, dengan rata-rata kader sebanyak 5 orang atau lebih, cakupan kelima kegiatannya lebih dari 50%, mampu menyelenggarakan program tambahan, serta telah memperoleh sumber pembiayaan dari dana sehat yang dikelola oleh masyarakat) per 100.000 penduduk untuk setiap kabupaten/kota di Provinsi Jawa Tengah pada tahun 2013.
Rasio dokter umum per 100.000 penduduk	X <sub>7</sub>	Rasio dokter yang memberikan pelayanan kesehatan di Puskesmas, Rumah Sakit, dan sarana pelayanan kesehatan lain per 100.000 penduduk untuk setiap kabupaten/kota di Provinsi Jawa Tengah pada tahun 2013.
Persentase penduduk usia 10 tahun ke atas yang melek huruf	X <sub>8</sub>	Persentase penduduk berusia 10 tahun ke atas yang mampu membaca dan menulis huruf latin atau huruf lainnya untuk setiap kabupaten/kota di Provinsi Jawa Tengah pada tahun 2013.
Persentase perempuan yang menikah di bawah usia 17 tahun	X <sub>9</sub>	Persentase perempuan yan tercatat menikah di bawah usia 17 tahun untuk setiap kabupaten/kota di Provinsi Jawa Tengah pada tahun 2013.
Persentase penduduk miskin	X <sub>10</sub>	Persentase penduduk yang rata-rata pengeluaran perkapitanya di bawah garis kemiskinan (yaitu : Rp. 261.881,00) untuk setiap kabupaten/kota di Provinsi Jawa Tengah pada tahun 2013.

### 3.2.4 Hubungan antara Variabel-variabel Penelitian dalam Model

Memperhatikan definisi operasional pada Tabel 3.1, dimana ketiga variabel respon yang merupakan *count data* dan dimungkinkan secara bersama berdistribusi Poisson multivariat, maka hubungan antara variabel bebas dan variabel respon dalam penelitian ini secara umum dapat disajikan dalam model global dan model lokal, sebagai berikut:

- Model Global

$$E[Y_{1i}] = \exp(\beta_{10} + \beta_{11}X_{1i} + \beta_{12}X_{2i} + \dots + \beta_{110}X_{10i})$$

$$E[Y_{2i}] = \exp(\beta_{20} + \beta_{21}X_{1i} + \beta_{22}X_{2i} + \dots + \beta_{210}X_{10i})$$

$$E[Y_{3i}] = \exp(\beta_{30} + \beta_{31}X_{1i} + \beta_{32}X_{2i} + \dots + \beta_{310}X_{10i})$$

dimana,  $\beta_{hl}$  merupakan koefisien regresi yang menunjukkan besarnya pengaruh variabel bebas  $X_l$  terhadap variabel respon  $Y_h$ .

- Model Lokal

$$E[Y_{1i}] = \exp(\beta_{10}(\mathbf{u}_i) + \beta_{11}(\mathbf{u}_i)X_{1i} + \beta_{12}(\mathbf{u}_i)X_{2i} + \dots + \beta_{110}(\mathbf{u}_i)X_{10i})$$

$$E[Y_{2i}] = \exp(\beta_{20}(\mathbf{u}_i) + \beta_{21}(\mathbf{u}_i)X_{1i} + \beta_{22}(\mathbf{u}_i)X_{2i} + \dots + \beta_{210}(\mathbf{u}_i)X_{10i})$$

$$E[Y_{3i}] = \exp(\beta_{30}(\mathbf{u}_i) + \beta_{31}(\mathbf{u}_i)X_{1i} + \beta_{32}(\mathbf{u}_i)X_{2i} + \dots + \beta_{310}(\mathbf{u}_i)X_{10i})$$

dimana,  $\beta_{hl}(\mathbf{u}_i)$  merupakan koefisien regresi yang menunjukkan besarnya pengaruh variabel bebas  $X_l$  terhadap variabel respon  $Y_h$  pada lokasi ke- $i$ .

### 3.2.5 Tahap Analisis Data

Analisis data untuk membuat model regresi “terbaik” dari faktor-faktor yang potensial mempengaruhi jumlah kematian ibu, neonatal dini dan neonatal lanjut di Provinsi Jawa Tengah dengan menggunakan MPR dan GWMPR dilakukan dengan tahapan sebagai berikut:

- a. Menghitung nilai minimum, maksimum, rata-rata, dan standar deviasi dari variabel penelitian.
- b. Menguji distribusi Poisson trivariat dari variabel respon
- c. Menguji signifikansi korelasi antar variabel respon.
- d. Menguji multikolinearitas dari variabel bebasnya.

- e. Menentukan model MPR dengan tahapan sebagai berikut :
  - 1. Menghitung estimasi parameter model MPR dengan metode maksimum likelihood.
  - 2. Melakukan pengujian secara serentak terhadap parameter regresi.
  - 3. Melakukan pengujian secara parsial terhadap masing-masing parameter regresi.
  - 4. Menentukan model MPR “terbaik” berdasarkan nilai AIC terkecil.
  - 5. Menyajikan interpretasi hasil analisis.
- f. Menguji heterogenitas spasial.
- g. Menentukan model GWMPR dengan tahapan sebagai berikut :
  - 1. Menghitung estimasi parameter model GWMPR dengan pembobot fungsi *kernel Gaussian* dan *bandwidth* optimum diperoleh dengan metode *golden section search* berdasarkan nilai *generalized cross validation* terkecil.
  - 2. Melakukan pengujian untuk kesamaan model MPR dan model GWMPR.
  - 3. Melakukan pengujian secara serentak terhadap parameter regresi.
  - 4. Melakukan pengujian secara parsial terhadap masing-masing parameter regresi untuk setiap lokasi.
  - 5. Menyajikan interpretasi hasil analisis.
- h. Membandingkan kebaikan model MPR dan GWMPR, dimana keduanya untuk kovariansi merupakan konstanta dan fungsi variabel bebas, dengan memperhatikan nilai AIC dan MSE.

## BAB IV

### *MULTIVARIATE POISSON REGRESSION*

Pada bab ini dibahas estimasi parameter dan pengujian hipotesis model *multivariate Poisson regression* (MPR). Pada masing-masing bahasan dibagi menjadi dua bagian berdasarkan kovariansinya, yaitu : kovariansi antar variabel respon diasumsikan sebagai suatu konstanta, yang selanjutnya dinamakan kovariansi merupakan konstanta, dan kovariansi antar variabel respon diasumsikan sebagai suatu fungsi dari variabel bebas, yang selanjutnya dinamakan kovariansi merupakan fungsi variabel bebas. Pembahasan dimulai dengan subbab 4.1 yang menjelaskan model MPR, dilanjutkan dengan subbab 4.1.1 dan subbab 4.1.2 berturut-turut membahas estimasi parameter model MPR dengan kovariansi merupakan konstanta dan model MPR dengan kovariansi merupakan fungsi variabel bebas. Selanjutnya pada subbab 4.2 dikemukakan pengujian hipotesis model MPR, dimana untuk subbab 4.2.1 dan subbab 4.2.2 berturut-turut membahas pengujian hipotesis model MPR dengan kovariansi merupakan konstanta dan model MPR dengan kovariansi merupakan fungsi variabel bebas.

#### **4.1 Model *Multivariate Poisson Regression***

*Multivariate Poisson regression* merupakan pengembangan dari regresi Poisson univariat ketika terdapat dua atau lebih variabel respon yang berupa *count data* saling berkorelasi. Selanjutnya untuk membangun model MPR, jika diberikan sampel random  $Y_{hi} \sim P(\lambda_h(s_i) + \lambda_0(s_i))$ ;  $i = 1, 2, \dots, n$  dan  $h = 1, 2, \dots, p$  dengan  $E[Y_{hi}] = \lambda_h(s_i) + \lambda_0(s_i)$  dimana  $s_i$  merupakan *exposure* yang didefinisikan sebagai ukuran populasi pada unit ke- $i$ , maka model MPR dapat dituliskan sebagai nilai ekspektasi dari  $Y_{hi}$  yang proporsional terhadap ukuran populasi  $s_i$  bergantung pada variabel bebas  $\mathbf{x}_i$ .

Jika kovariansi merupakan konstanta, yaitu :  $\lambda_0(s_i) = \lambda_0$ , maka model MPR adalah :

$$E[Y_{hi}] = s_i e^{\mathbf{x}_i^T \boldsymbol{\beta}_h} ; i = 1, 2, \dots, n ; h = 1, 2, \dots, p , \quad (4.1)$$

atau dapat dituliskan

$$\lambda_h(s_i) = s_i e^{\mathbf{x}_i^T \boldsymbol{\beta}_h} - \lambda_0. \quad (4.2)$$

Sementara itu, jika kovariansi merupakan fungsi variabel bebas, yaitu :

$$\lambda_0(s_i) = s_i e^{\mathbf{x}_i^T \boldsymbol{\beta}_0}, \text{ maka model MPR adalah :}$$

$$E[Y_{hi}] = s_i (e^{\mathbf{x}_i^T \boldsymbol{\beta}_h} + e^{\mathbf{x}_i^T \boldsymbol{\beta}_0}) ; i = 1, 2, \dots, n ; h = 1, 2, \dots, p. \quad (4.3)$$

Oleh karena  $E[Y_{hi}] = \lambda_h(s_i) + \lambda_0(s_i)$ , maka model MPR pada persamaan (4.3) dapat dituliskan :

$$\lambda_0(s_i) = s_i e^{\mathbf{x}_i^T \boldsymbol{\beta}_0} ; i = 1, 2, \dots, n, \quad (4.4)$$

$$\lambda_h(s_i) = s_i e^{\mathbf{x}_i^T \boldsymbol{\beta}_h} ; i = 1, 2, \dots, n ; h = 1, 2, \dots, p, \quad (4.5)$$

dimana

$$\mathbf{x}_i = [1 \ x_{1i} \ x_{2i} \ \dots \ x_{ki}]^T,$$

$$\boldsymbol{\beta}_0 = [\beta_{00} \ \beta_{01} \ \beta_{02} \ \dots \ \beta_{0k}]^T,$$

$$\boldsymbol{\beta}_h = [\beta_{h0} \ \beta_{h1} \ \beta_{h2} \ \dots \ \beta_{hk}]^T.$$

#### 4.1.1 Estimasi Parameter Model MPR dengan Kovariansi Merupakan Konstanta

Estimasi parameter model MPR dilakukan dengan menggunakan metode *maximum likelihood estimation* (MLE). Ide dasar dari MLE adalah menentukan estimator parameter dengan memaksimumkan fungsi likelihood. Untuk menentukan estimasi parameter, diberikan  $n$  sampel random dari variabel random  $(Y_{1i}, Y_{2i}, \dots, Y_{pi}) \sim MP(\lambda_0(s_i), \lambda_1(s_i), \dots, \lambda_p(s_i))$ .

Mempertimbangkan fungsi probabilitas bersama pada persamaan (2.9), maka fungsi likelihood dapat ditulis sebagai berikut :

$$L(\lambda_0(s_i), \lambda_h(s_i) ; h = 1, 2, \dots, p ; i = 1, 2, \dots, n) = \prod_{i=1}^n \left( e^{-\lambda_0(s_i) - \sum_{h=1}^p \lambda_h(s_i)} \sum_{v=0}^q \left( \frac{\lambda_0^v(s_i)}{v!} \prod_{h=1}^p \frac{\lambda_h^{y_{hi}-v}(s_i)}{(y_{hi}-v)!} \right) \right). \quad (4.6)$$

Dengan mensubstitusikan persamaan (4.2) ke dalam persamaan (4.6) diperoleh fungsi likelihood sebagai berikut :



$$\begin{aligned}
L(\lambda_0, \boldsymbol{\beta}_h ; h=1, 2, \dots, p) &= \prod_{i=1}^n \left( A_i \exp(-\lambda_0 - \sum_{h=1}^p (s_i e^{\mathbf{x}_i^T \boldsymbol{\beta}_h} - \lambda_0)) \right) \\
&= \prod_{i=1}^n \left( A_i \exp((p-1)\lambda_0 - \sum_{h=1}^p s_i e^{\mathbf{x}_i^T \boldsymbol{\beta}_h}) \right),
\end{aligned} \tag{4.7}$$

dimana

$$A_i = \sum_{v=0}^q \left( \frac{\lambda_0^v}{v!} \prod_{h=1}^p \frac{(s_i e^{\mathbf{x}_i^T \boldsymbol{\beta}_h} - \lambda_0)^{y_{hi}-v}}{(y_{hi}-v)!} \right).$$

Jika  $Q_1 = \ln L(\lambda_0, \boldsymbol{\beta}_h ; h=1, 2, \dots, p)$ , maka fungsi log-likelihood dapat ditulis :

$$Q_1 = n(p-1)\lambda_0 - \sum_{i=1}^n \sum_{h=1}^p s_i e^{\mathbf{x}_i^T \boldsymbol{\beta}_h} + \sum_{i=1}^n \ln A_i. \tag{4.8}$$

Misalkan  $\boldsymbol{\theta}_1 = [\lambda_0 \quad \boldsymbol{\beta}_1^T \quad \boldsymbol{\beta}_2^T \quad \dots \quad \boldsymbol{\beta}_p^T]^T$  merupakan vektor parameter model MPR pada persamaan (4.1). Untuk memaksimumkan fungsi log-likelihood,  $Q_1$  diturunkan terhadap  $\boldsymbol{\theta}_1$  disamakan dengan nol, sebagai berikut :

Fungsi log-likelihood model MPR pada persamaan (4.8), jika dimisalkan:

$$A_i = \sum_{v=0}^q \left( A_{v0i} \prod_{h=1}^p A_{vhi} \right); (i=1, 2, \dots, n),$$

dimana

$$A_{v0i} = \frac{\lambda_0^v}{v!} \text{ dan } A_{vhi} = \frac{(s_i e^{\mathbf{x}_i^T \boldsymbol{\beta}_h} - \lambda_0)^{y_{hi}-v}}{(y_{hi}-v)!},$$

maka hasil turunan parsial  $Q_1$  terhadap  $\lambda_0$  dan  $\boldsymbol{\beta}_h$  ( $h=1, 2, \dots, p$ ) adalah :

$$\frac{\partial Q_1}{\partial \lambda_0} = n(p-1) + \sum_{i=1}^n \frac{1}{A_i} \frac{\partial A_i}{\partial \lambda_0}, \tag{4.9}$$

$$\frac{\partial Q_1}{\partial \boldsymbol{\beta}_h} = - \sum_{i=1}^n s_i e^{\mathbf{x}_i^T \boldsymbol{\beta}_h} \mathbf{x}_i + \sum_{i=1}^n \frac{1}{A_i} \frac{\partial A_i}{\partial \boldsymbol{\beta}_h}. \tag{4.10}$$

Sedangkan turunan  $A_i$  terhadap  $\lambda_0$  dan  $\boldsymbol{\beta}_h$  adalah :

$$\frac{\partial A_i}{\partial \lambda_0} = \sum_{v=0}^q \left( \frac{v \lambda_0^{v-1}}{v!} \prod_{h=1}^p A_{vhi} - \frac{\lambda_0^v}{v!} \sum_{h=1}^p (A_{vhi}^* \prod_{\substack{g=1 \\ g \neq h}}^p A_{vgi}) \right), \tag{4.11}$$

$$\frac{\partial A_i}{\partial \boldsymbol{\beta}_h} = \sum_{v=0}^q \left( \frac{\lambda_0^v}{v!} A_{vhi}^* s_i e^{\mathbf{x}_i^T \boldsymbol{\beta}_h} \mathbf{x}_i \prod_{\substack{g=1 \\ g \neq h}}^p A_{vgi} \right), \tag{4.12}$$

dimana

$$A_{vhi}^* = \frac{(y_{hi} - v)(s_i e^{\mathbf{x}_i^T \boldsymbol{\beta}_h} - \lambda_0)^{y_{hi} - v - 1}}{(y_{hi} - v)!}.$$

Hasil turunan parsial fungsi log-likelihood terhadap masing-masing parameternya pada persamaan (4.9) s.d. (4.12), dan disamakan dengan nol merupakan sistem persamaan tidak *close form*, sehingga MLE tidak dapat menghasilkan penyelesaian analitik. Oleh karena itu untuk mendapatkan estimator dengan metode MLE diperlukan proses iterasi secara numerik. Metode iterasi yang digunakan dalam penelitian ini adalah algoritma *Newton-Raphson* dengan formula sebagai berikut :

$$\hat{\boldsymbol{\theta}}_{l(t+1)} = \hat{\boldsymbol{\theta}}_{l(t)} - \mathbf{H}^{-1}(\hat{\boldsymbol{\theta}}_{l(t)}) \cdot \mathbf{g}(\hat{\boldsymbol{\theta}}_{l(t)}), \quad (4.13)$$

dimana

$\hat{\boldsymbol{\theta}}_{l(t)}$  adalah estimator parameter pada iterasi ke- $t$ ,

$$\mathbf{g}^T(\boldsymbol{\theta}_{l(t)}) = \left[ \frac{\partial Q_1}{\partial \lambda_0} \quad \frac{\partial Q_1}{\partial \boldsymbol{\beta}_1^T} \quad \dots \quad \frac{\partial Q_1}{\partial \boldsymbol{\beta}_p^T} \right]_{\boldsymbol{\theta}_1 = \boldsymbol{\theta}_{l(t)}} \text{ adalah vektor gradien pada itersai ke-}t,$$

dengan elemen vektor sebagaimana tertulis pada persamaan (4.9) s.d. (4.12), dan

$$\mathbf{H}(\boldsymbol{\theta}_{l(t)}) = \begin{bmatrix} \frac{\partial^2 Q_1}{\partial \lambda_0^2} & \frac{\partial^2 Q_1}{\partial \lambda_0 \partial \boldsymbol{\beta}_1^T} & \dots & \frac{\partial^2 Q_1}{\partial \lambda_0 \partial \boldsymbol{\beta}_p^T} \\ \frac{\partial^2 Q_1}{\partial \lambda_0 \partial \boldsymbol{\beta}_1} & \frac{\partial^2 Q_1}{\partial \boldsymbol{\beta}_1 \partial \boldsymbol{\beta}_1^T} & \dots & \frac{\partial^2 Q_1}{\partial \boldsymbol{\beta}_1 \partial \boldsymbol{\beta}_p^T} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial^2 Q_1}{\partial \lambda_0 \partial \boldsymbol{\beta}_p} & \frac{\partial^2 Q_1}{\partial \boldsymbol{\beta}_1 \partial \boldsymbol{\beta}_p^T} & \dots & \frac{\partial^2 Q_1}{\partial \boldsymbol{\beta}_p \partial \boldsymbol{\beta}_p^T} \end{bmatrix}_{\boldsymbol{\theta}_1 = \boldsymbol{\theta}_{l(t)}} \text{ adalah matriks Hessian pada iterasi}$$

ke- $t$ , dengan elemen matriks merupakan turunan parsial kedua dari  $Q_1$  terhadap kombinasi masing-masing parameternya, sebagai berikut :

$$\frac{\partial^2 Q_1}{\partial \lambda_0^2} = \sum_{i=1}^n \left( \frac{1}{A_i} \frac{\partial^2 A_i}{\partial \lambda_0^2} - \frac{1}{A_i^2} \left( \frac{\partial A_i}{\partial \lambda_0} \right)^2 \right), \quad (4.14)$$

$$\frac{\partial^2 Q_1}{\partial \boldsymbol{\beta}_h \partial \boldsymbol{\beta}_h^T} = - \sum_{i=1}^n s_i e^{\mathbf{x}_i^T \boldsymbol{\beta}_h} \mathbf{x}_i \mathbf{x}_i^T + \sum_{i=1}^n \left( \frac{1}{A_i} \frac{\partial^2 A_i}{\partial \boldsymbol{\beta}_h \partial \boldsymbol{\beta}_h^T} - \frac{1}{A_i^2} \frac{\partial A_i}{\partial \boldsymbol{\beta}_h} \frac{\partial A_i}{\partial \boldsymbol{\beta}_h^T} \right), \quad (4.15)$$

$$\frac{\partial^2 Q_1}{\partial \lambda_0 \partial \beta_h} = \sum_{i=1}^n \left( \frac{1}{A_i} \frac{\partial^2 A_i}{\partial \lambda_0 \partial \beta_h} - \frac{1}{A_i^2} \frac{\partial A_i}{\partial \lambda_0} \frac{\partial A_i}{\partial \beta_h} \right), \quad (4.16)$$

untuk  $g, h = 1, 2, \dots, p$  ;  $g \neq h$  ,

$$\frac{\partial^2 Q_1}{\partial \beta_h \partial \beta_g^T} = \sum_{i=1}^n \left( \frac{1}{A_i} \frac{\partial^2 A_i}{\partial \beta_h \partial \beta_g^T} - \frac{1}{A_i^2} \frac{\partial A_i}{\partial \beta_h} \frac{\partial A_i}{\partial \beta_g^T} \right). \quad (4.17)$$

Turunan parsial kedua dari  $A_i$  terhadap masing-masing kombinasi  $\lambda_0$  dan  $\beta_h$  sebagai berikut :

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 A_i}{\partial \lambda_0^2} = \sum_{v=0}^q \left( \frac{v(v-1)\lambda_0^{v-2}}{v!} \prod_{h=1}^p A_{vhi} - \frac{2v\lambda_0^{v-1}}{v!} \sum_{h=1}^p (A_{vhi}^* \prod_{\substack{g=1 \\ g \neq h}}^p A_{vgi}) + \right. \\ \left. \frac{\lambda_0^v}{v!} \left( \sum_{h=1}^p (A_{vhi}^{**} \prod_{\substack{g=1 \\ g \neq h}}^p A_{vgi}) + \sum_{h=1}^p \sum_{\substack{g=1 \\ g \neq h}}^p (A_{vhi}^* A_{vgi}^* \prod_{\substack{t=1 \\ t \neq h, g}}^p A_{vti}) \right) \right), \end{aligned} \quad (4.18)$$

$$\frac{\partial^2 A_i}{\partial \beta_h \partial \beta_h^T} = \sum_{v=0}^q \left( \frac{\lambda_0^v}{v!} \left( A_{vhi}^{**} s_i^2 e^{2\mathbf{x}_i^T \beta_h} \mathbf{x}_i \mathbf{x}_i^T + A_{vhi}^* e^{\mathbf{x}_i^T \beta_h} \mathbf{x}_i \mathbf{x}_i^T \right) \prod_{\substack{g=1 \\ g \neq h}}^p A_{vgi} \right), \quad (4.19)$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 A_i}{\partial \lambda_0 \partial \beta_h} = \sum_{v=0}^q \left( \frac{v\lambda_0^{v-1}}{v!} A_{vhi}^* s_i e^{\mathbf{x}_i^T \beta_h} \mathbf{x}_i \prod_{\substack{g=1 \\ g \neq h}}^p A_{vgi} - \frac{\lambda_0^v}{v!} A_{vhi}^{**} s_i e^{\mathbf{x}_i^T \beta_h} \mathbf{x}_i \prod_{\substack{g=1 \\ g \neq h}}^p A_{vgi} - \right. \\ \left. \frac{\lambda_0^v}{v!} A_{vhi}^* s_i e^{\mathbf{x}_i^T \beta_h} \mathbf{x}_i \sum_{\substack{g=1 \\ g \neq h}}^p (A_{vgi}^* \prod_{\substack{t=1 \\ t \neq g, h}}^p A_{vti}) \right), \end{aligned} \quad (4.20)$$

$$\frac{\partial^2 A_i}{\partial \beta_h \partial \beta_g^T} = \sum_{v=0}^q \left( \frac{\lambda_0^v}{v!} \mathbf{x}_i \mathbf{x}_i^T A_{vhi}^* s_i e^{\mathbf{x}_i^T \beta_h} A_{vgi}^* s_i e^{\mathbf{x}_i^T \beta_g} \prod_{\substack{t=1 \\ t \neq h, g}}^p A_{vti} \right), \quad (4.21)$$

dimana

$$A_{vhi}^{**} = \frac{(y_{hi} - v)(y_{hi} - v - 1)(s_i e^{\mathbf{x}_i^T \beta_h} - \lambda_0)^{(y_{hi} - v - 2)}}{(y_{hi} - v)!}.$$

Proses iterasi *Newton-Raphson* pada persamaan (4.13), dimulai dengan memasukkan nilai awal estimator parameter, yaitu :

$$\hat{\boldsymbol{\theta}}_{1(0)} = \left[ \hat{\lambda}_{0(0)} \quad \hat{\boldsymbol{\beta}}_{1(0)}^T \quad \hat{\boldsymbol{\beta}}_{2(0)}^T \quad \dots \quad \hat{\boldsymbol{\beta}}_{p(0)}^T \right]^T,$$

dimana

$$\hat{\lambda}_{0(0)} = \widehat{\text{cov}}[\mathbf{y}_g^*, \mathbf{y}_h^*] ; g, h = 1, 2, \dots, p ; g \neq h,$$

$$\hat{\beta}_{h(0)} = (\mathbf{X}^T \mathbf{X})^{-1} \mathbf{X}^T \mathbf{y}_h^*,$$

dengan  $\mathbf{y}_h^* = [y_{h1}^* \ y_{h2}^* \ \dots \ y_{hm}^*]^T$  adalah vektor variabel respon baru dengan elemen-elemen sebagai berikut :

$$y_{hi}^* = \begin{cases} \ln(y_{hi}/s_i) & ; y_{hi} = 1, 2, 3, \dots \\ 0 & ; y_{hi} = 0 \end{cases},$$

dan proses iterasi tersebut dihentikan jika  $\|\hat{\theta}_{1(t+1)} - \hat{\theta}_{1(t)}\| \leq \varepsilon$ , dengan  $\varepsilon$  bilangan riil positif yang sangat kecil.

#### 4.1.2 Estimasi Parameter Model MPR dengan Kovariansi Merupakan Fungsi Variabel Bebas

Estimasi parameter pada model ini dilakukan seperti pada model MPR dengan kovariansi merupakan konstanta dengan menggantikan  $\lambda_0$  sebagai fungsi variabel bebas, yaitu :  $s_i e^{\mathbf{x}_i^T \beta_0}$ .

Mempertimbangkan model pada persamaan (4.4) dan (4.5), maka fungsi likelihood pada persamaan (4.6) dapat ditulis sebagai berikut :

$$L(\beta_0, \beta_h ; h = 1, 2, \dots, p) = \prod_{i=1}^n \left( B_i \exp(-s_i e^{\mathbf{x}_i^T \beta_0} - \sum_{h=1}^p s_i e^{\mathbf{x}_i^T \beta_h}) \right), \quad (4.22)$$

dimana

$$B_i = \sum_{v=0}^q \left( \frac{(s_i e^{\mathbf{x}_i^T \beta_0})^v}{v!} \prod_{h=1}^p \frac{(s_i e^{\mathbf{x}_i^T \beta_h})^{y_{hi}-v}}{(y_{hi}-v)!} \right).$$

Jika  $Q_2 = \ln L(\beta_0, \beta_h ; h = 1, 2, \dots, p)$  maka fungsi log-likelihood dapat ditulis :

$$Q_2 = \sum_{i=1}^n \ln B_i - \sum_{i=1}^n s_i e^{\mathbf{x}_i^T \beta_0} - \sum_{i=1}^n \sum_{h=1}^p s_i e^{\mathbf{x}_i^T \beta_h}. \quad (4.23)$$

Misalkan  $\theta_2 = [\beta_0^T \ \beta_1^T \ \beta_2^T \ \dots \ \beta_p^T]^T$  merupakan vektor parameter model MPR pada persamaan (4.3). Untuk memaksimumkan fungsi log-likelihood,  $Q_2$  diturunkan terhadap  $\theta_2$  disamakan dengan nol, sebagai berikut :

Fungsi log-likelihood model MPR pada persamaan (4.23), jika dimisalkan:

$$B_i = \sum_{v=0}^q \left( B_{v0i} \prod_{h=1}^p B_{vhi} \right); (i = 1, 2, \dots, n),$$

dimana

$$B_{v0i} = \frac{(s_i e^{\mathbf{x}_i^T \boldsymbol{\beta}_0})^v}{v!} \text{ dan } B_{vhi} = \frac{(s_i e^{\mathbf{x}_i^T \boldsymbol{\beta}_h})^{y_{hi}-v}}{(y_{hi}-v)!},$$

maka hasil turunan parsial  $Q_2$  terhadap  $\boldsymbol{\beta}_0$  dan  $\boldsymbol{\beta}_h$  ( $h = 1, 2, \dots, p$ ) diperoleh sebagai berikut :

$$\frac{\partial Q_2}{\partial \boldsymbol{\beta}_0} = \sum_{i=1}^n \frac{1}{B_i} \frac{\partial B_i}{\partial \boldsymbol{\beta}_0} - \sum_{i=1}^n s_i e^{\mathbf{x}_i^T \boldsymbol{\beta}_0} \mathbf{x}_i, \quad (4.24)$$

$$\frac{\partial Q_2}{\partial \boldsymbol{\beta}_h} = \sum_{i=1}^n \frac{1}{B_i} \frac{\partial B_i}{\partial \boldsymbol{\beta}_h} - \sum_{i=1}^n s_i e^{\mathbf{x}_i^T \boldsymbol{\beta}_h} \mathbf{x}_i. \quad (4.25)$$

Sedangkan turunan  $B_i$  terhadap  $\boldsymbol{\beta}_0$  dan  $\boldsymbol{\beta}_h$  adalah

$$\frac{\partial B_i}{\partial \boldsymbol{\beta}_0} = \sum_{v=0}^q \left( \frac{v(s_i e^{\mathbf{x}_i^T \boldsymbol{\beta}_0})^v}{v!} \mathbf{x}_i \prod_{h=1}^p B_{vhi} \right), \quad (4.26)$$

$$\frac{\partial B_i}{\partial \boldsymbol{\beta}_h} = \sum_{v=0}^q \left( \frac{(y_{hi}-v)(s_i e^{\mathbf{x}_i^T \boldsymbol{\beta}_0})^{(y_{hi}-v)}}{(y_{hi}-v)!} \mathbf{x}_i B_{v0i} \prod_{\substack{g=1 \\ g \neq h}}^p B_{vgi} \right). \quad (4.27)$$

Sebagaimana pada model MPR dengan kovariansi merupakan konstanta, model ini mempunyai turunan parsial dari fungsi log-likelihood terhadap masing-masing parameternya pada persamaan (4.24) s.d.(4.27), dan disamakan dengan nol juga merupakan sistem persamaan tidak *close form*, sehingga MLE tidak dapat menghasilkan penyelesaian analitik. Oleh karena itu untuk mendapatkan estimator dengan metode MLE diperlukan proses iterasi secara numerik, dengan algoritma *Newton-Raphson* dengan formula sebagai berikut :

$$\hat{\boldsymbol{\theta}}_{2(t+1)} = \hat{\boldsymbol{\theta}}_{2(t)} - \mathbf{H}^{-1}(\hat{\boldsymbol{\theta}}_{2(t)}) \mathbf{g}(\hat{\boldsymbol{\theta}}_{2(t)}), \quad (4.28)$$

dimana

$\hat{\boldsymbol{\theta}}_{2(t)}$  adalah estimator parameter pada iterasi ke- $t$ ,

$$\mathbf{g}^T(\boldsymbol{\theta}_{2(t)}) = \left[ \frac{\partial Q_2}{\partial \boldsymbol{\beta}_0} \quad \frac{\partial Q_2}{\partial \boldsymbol{\beta}_1^T} \quad \dots \quad \frac{\partial Q_2}{\partial \boldsymbol{\beta}_p^T} \right]_{\boldsymbol{\theta}_2 = \boldsymbol{\theta}_{2(t)}} \text{ adalah vektor gradien pada iterasi ke-}t,$$

dengan elemen vektor sebagaimana tertulis pada persamaan (4.24) s.d. (4.27), dan

$$\mathbf{H}(\boldsymbol{\theta}_{2(t)}) = \begin{bmatrix} \frac{\partial^2 Q_2}{\partial \boldsymbol{\beta}_0 \partial \boldsymbol{\beta}_0^T} & \frac{\partial^2 Q_2}{\partial \boldsymbol{\beta}_0 \partial \boldsymbol{\beta}_1^T} & \dots & \frac{\partial^2 Q_2}{\partial \boldsymbol{\beta}_0 \partial \boldsymbol{\beta}_p^T} \\ \frac{\partial^2 Q_2}{\partial \boldsymbol{\beta}_1 \partial \boldsymbol{\beta}_0^T} & \frac{\partial^2 Q_2}{\partial \boldsymbol{\beta}_1 \partial \boldsymbol{\beta}_1^T} & \dots & \frac{\partial^2 Q_2}{\partial \boldsymbol{\beta}_1 \partial \boldsymbol{\beta}_p^T} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial^2 Q_2}{\partial \boldsymbol{\beta}_p \partial \boldsymbol{\beta}_0^T} & \frac{\partial^2 Q_2}{\partial \boldsymbol{\beta}_p \partial \boldsymbol{\beta}_1^T} & \dots & \frac{\partial^2 Q_2}{\partial \boldsymbol{\beta}_p \partial \boldsymbol{\beta}_p^T} \end{bmatrix}_{\boldsymbol{\theta}_2 = \boldsymbol{\theta}_{2(t)}} \quad \text{adalah matriks Hessian pada}$$

iterasi ke- $t$ , dimana elemen matriks merupakan turunan parsial kedua dari  $Q_2$  terhadap kombinasi masing-masing parameternya, sebagai berikut :

$$\frac{\partial^2 Q_2}{\partial \boldsymbol{\beta}_0 \partial \boldsymbol{\beta}_0^T} = \sum_{i=1}^n \left( \frac{1}{B_i} \frac{\partial^2 B_i}{\partial \boldsymbol{\beta}_0 \partial \boldsymbol{\beta}_0^T} - \frac{1}{B_i^2} \frac{\partial B_i}{\partial \boldsymbol{\beta}_0} \frac{\partial B_i}{\partial \boldsymbol{\beta}_0^T} - s_i e^{\mathbf{x}_i^T \boldsymbol{\beta}_0} \mathbf{x}_i \mathbf{x}_i^T \right), \quad (4.29)$$

$$\frac{\partial^2 Q_2}{\partial \boldsymbol{\beta}_h \partial \boldsymbol{\beta}_h^T} = \sum_{i=1}^n \left( \frac{1}{B_i} \frac{\partial^2 B_i}{\partial \boldsymbol{\beta}_h \partial \boldsymbol{\beta}_h^T} - \frac{1}{B_i^2} \frac{\partial B_i}{\partial \boldsymbol{\beta}_h} \frac{\partial B_i}{\partial \boldsymbol{\beta}_h^T} - s_i e^{\mathbf{x}_i^T \boldsymbol{\beta}_h} \mathbf{x}_i \mathbf{x}_i^T \right), \quad (4.30)$$

$$\frac{\partial^2 Q_2}{\partial \boldsymbol{\beta}_0 \partial \boldsymbol{\beta}_h^T} = \sum_{i=1}^n \left( \frac{1}{B_i} \frac{\partial^2 B_i}{\partial \boldsymbol{\beta}_0 \partial \boldsymbol{\beta}_h^T} - \frac{1}{B_i^2} \frac{\partial B_i}{\partial \boldsymbol{\beta}_0} \frac{\partial B_i}{\partial \boldsymbol{\beta}_h^T} \right), \quad (4.31)$$

untuk  $g, h = 1, 2, \dots, p ; g \neq h$ ,

$$\frac{\partial^2 Q_2}{\partial \boldsymbol{\beta}_h \partial \boldsymbol{\beta}_g^T} = \sum_{i=1}^n \left( \frac{1}{B_i} \frac{\partial^2 B_i}{\partial \boldsymbol{\beta}_h \partial \boldsymbol{\beta}_g^T} - \frac{1}{B_i^2} \frac{\partial B_i}{\partial \boldsymbol{\beta}_h} \frac{\partial B_i}{\partial \boldsymbol{\beta}_g^T} \right). \quad (4.32)$$

Turunan parsial kedua dari  $B_i$  terhadap masing-masing kombinasi  $\boldsymbol{\beta}_0$  dan  $\boldsymbol{\beta}_h$  sebagai berikut :

$$\frac{\partial^2 B_i}{\partial \boldsymbol{\beta}_0 \partial \boldsymbol{\beta}_0^T} = \sum_{v=0}^q \left( \frac{v(v-1)(s_i e^{\mathbf{x}_i^T \boldsymbol{\beta}_0})^v}{v!} \mathbf{x}_i \mathbf{x}_i^T \prod_{h=1}^p B_{vhi} \right), \quad (4.33)$$

$$\frac{\partial^2 B_i}{\partial \boldsymbol{\beta}_h \partial \boldsymbol{\beta}_h^T} = \sum_{v=0}^q \left( \frac{(y_h - v)^2 (s_i e^{\mathbf{x}_i^T \boldsymbol{\beta}_0})^{(y_h - v)}}{(y_h - v)!} \mathbf{x}_i \mathbf{x}_i^T B_{v0i} \prod_{\substack{g=1 \\ g \neq h}}^p B_{vgi} \right), \quad (4.34)$$

$$\frac{\partial^2 B_i}{\partial \boldsymbol{\beta}_0 \partial \boldsymbol{\beta}_h^T} = \sum_{v=0}^q \left( \frac{v(s_i e^{\mathbf{x}_i^T \boldsymbol{\beta}_0})^v}{v!} \frac{(y_h - v)(s_i e^{\mathbf{x}_i^T \boldsymbol{\beta}_h})^{(y_h - v)}}{(y_h - v)!} \mathbf{x}_i \mathbf{x}_i^T \prod_{\substack{g=1 \\ g \neq h}}^p B_{vgi} \right), \quad (4.35)$$

$$\frac{\partial^2 B_i}{\partial \boldsymbol{\beta}_h \partial \boldsymbol{\beta}_g^T} = \sum_{v=0}^q \left( \frac{(y_h - v)(s_i e^{\mathbf{x}_i^T \boldsymbol{\beta}_h})^{(y_h - v)}}{(y_h - v)!} \frac{(y_g - v)(s_i e^{\mathbf{x}_i^T \boldsymbol{\beta}_g})^{(y_g - v)}}{(y_g - v)!} \mathbf{x}_i \mathbf{x}_i^T B_{v0i} \prod_{\substack{t=1 \\ t \neq h, g}}^p B_{vti} \right). \quad (4.36)$$

Proses iterasi *Newton-Raphson* pada persamaan (4.28), dimulai dengan memasukkan nilai awal estimator parameter, yaitu :

$$\hat{\boldsymbol{\theta}}_{2(0)} = [\hat{\boldsymbol{\beta}}_{0(0)}^T \quad \hat{\boldsymbol{\beta}}_{1(0)}^T \quad \hat{\boldsymbol{\beta}}_{2(0)}^T \quad \dots \quad \hat{\boldsymbol{\beta}}_{p(0)}^T]^T ,$$

dimana

$$\hat{\boldsymbol{\beta}}_{0(0)} = (\mathbf{X}^T \mathbf{X})^{-1} \mathbf{X}^T \mathbf{y}_0^*$$

$$\hat{\boldsymbol{\beta}}_{h(0)} = (\mathbf{X}^T \mathbf{X})^{-1} \mathbf{X}^T \mathbf{y}_h^* ,$$

dengan  $\mathbf{y}_0^* = \hat{E}[\mathbf{y}_0 | \mathbf{y}_h, \boldsymbol{\theta}]$  dan

$\mathbf{y}_h^* = [y_{h1}^* \quad y_{h2}^* \quad \dots \quad y_{hn}^*]^T$  adalah vektor variabel respon baru dengan elemen sebagai berikut :

$$y_{hi}^* = \begin{cases} \ln(y_{hi}/s_i) & ; y_{hi} = 1, 2, 3, \dots \\ 0 & ; y_{hi} = 0 \end{cases} ,$$

dan proses iterasi ini dihentikan jika  $\|\hat{\boldsymbol{\theta}}_{2(t+1)} - \hat{\boldsymbol{\theta}}_{2(t)}\| \leq \varepsilon$  , dengan  $\varepsilon$  bilangan riil positif yang sangat kecil.

## 4.2 Pengujian Hipotesis Model MPR

Pengujian hipotesis model MPR dilakukan baik untuk uji parameter secara serentak maupun uji parameter secara parsial. Pengujian parameter secara serentak digunakan untuk menentukan secara simultan signifikansi dari koefisien regresi dalam model, sedangkan pengujian secara parsial digunakan untuk mengetahui parameter mana yang memberikan pengaruh signifikan terhadap model. Untuk menentukan statistik uji dilakukan dengan menggunakan metode *Likelihood Ratio Test* (LRT).

Ide dasar metode LRT untuk menentukan nilai statistik uji adalah membandingkan nilai maksimum dari fungsi likelihood pada ruang parameter pada  $H_0$  (untuk nilai parameter pada model sederhana tanpa melibatkan variabel bebas) terhadap ruang parameter pada populasi (untuk nilai parameter pada model yang melibatkan semua variabel bebas).

#### 4.2.1 Pengujian Hipotesis Model MPR dengan Kovariansi Merupakan Konstanta

Pada bagian ini dibahas tentang penentuan statistik uji beserta distribusinya untuk pengujian parameter secara serentak dan uji parameter secara parsial model MPR dengan kovariansi merupakan konstanta.

##### Statistik Uji Serentak

Pengujian serentak model MPR dengan kovariansi merupakan konstanta di formulasikan sebagai berikut :

$$H_0 : \beta_{h1} = \beta_{h2} = \dots = \beta_{hk} = 0 \quad ; h = 1, 2, \dots, p, \quad (4.37)$$

$$H_1 : \text{paling sedikit ada satu } \beta_{hl} \neq 0 \quad ; h = 1, 2, \dots, p \quad ; l = 1, 2, \dots, k.$$

Untuk menentukan daerah kritis dari pengujian hipotesis pada persamaan (4.37) diperlukan statistik uji yang diperoleh dengan metode LRT, melalui tahapan sebagai berikut :

- Ruang parameter di bawah  $H_0$  adalah  $\omega_1 = \{\lambda_{00}, \beta_{h00} \ ; h = 1, 2, \dots, p\}$ , sehingga nilai maksimum fungsi likelihood dapat ditentukan melalui proses berikut:

$$\begin{aligned} L(\omega_1) &= \prod_{i=1}^n f(y_{hi} \mid \lambda_{00}, \beta_{h00}) \\ &= \prod_{i=1}^n \left( A_{i0} \exp((p-1)\lambda_{00} - \sum_{h=1}^p s_i e^{\beta_{h00}}) \right), \end{aligned} \quad (4.38)$$

$$\text{dimana } A_{i0} = \sum_{v=0}^q \left( \frac{\lambda_{00}^v \prod_{h=1}^p (s_i e^{\beta_{h00}} - \lambda_{00})^{y_{hi}-v}}{v! \prod_{h=1}^p (y_{hi} - v)!} \right).$$

Misalkan  $\hat{\theta}_{102} = [\hat{\lambda}_{00} \quad \hat{\beta}_{100} \quad \hat{\beta}_{200} \quad \dots \quad \hat{\beta}_{p00}]^T$  merupakan estimator MLE dari parameter pada  $H_0$ , maka

$$\begin{aligned} L(\hat{\theta}_{102}) &= \text{maks } L(\omega_1) \\ &= \prod_{i=1}^n \left( \hat{A}_{i0} \exp((p-1)\hat{\lambda}_{00} - \sum_{h=1}^p s_i e^{\hat{\beta}_{h00}}) \right), \end{aligned} \quad (4.39)$$

$$\text{dimana } \hat{A}_{i0} = \sum_{v=0}^q \left( \frac{\hat{\lambda}_{00}^v \prod_{h=1}^p (s_i e^{\hat{\beta}_{h00}} - \hat{\lambda}_{00})^{y_{hi}-v}}{v! \prod_{h=1}^p (y_{hi} - v)!} \right).$$



$\hat{\lambda}_{00}$  dan  $\hat{\beta}_{h00}$  pada persamaan (4.39) diperoleh dengan memaksimumkan fungsi log-likelihood di ruang  $\omega_1$ , yaitu :

$$\begin{aligned} Q_{10} = \ln L(\omega_1) &= \sum_{i=1}^n \left( ((p-1)\lambda_{00} - \sum_{h=1}^p s_i e^{\beta_{h00}}) + \ln A_{i0} \right) \\ &= n(p-1)\lambda_{00} - n \sum_{h=1}^p s_i e^{\beta_{h00}} + \sum_{i=1}^n \ln A_{i0} . \end{aligned} \quad (4.40)$$

Misalkan  $A_{i0} = \sum_{v=0}^q \left( A_{v0i0} \prod_{h=1}^p A_{vhi0} \right)$ ;  $i = 1, 2, \dots, n$ ,

dimana

$$A_{v0i0} = \frac{\lambda_{00}^v}{v!} \quad \text{dan} \quad A_{vhi0} = \frac{(s_i e^{\beta_{h00}} - \lambda_{00})^{y_{hi}-v}}{(y_{hi}-v)!} ; h = 1, 2, \dots, p ,$$

maka hasil turunan pertama  $Q_{10}$  terhadap  $\lambda_{00}$  dan  $\beta_{h00}$  diperoleh :

$$\begin{aligned} \frac{\partial Q_{10}}{\partial \lambda_{00}} &= n(p-1) + \sum_{i=1}^n \frac{1}{A_{i0}} \frac{\partial A_{i0}}{\partial \lambda_{00}} \\ &= n(p-1) + \sum_{i=1}^n \frac{1}{A_{i0}} \sum_{v=0}^q \left( \frac{v \lambda_{00}^{v-1}}{v!} \prod_{h=1}^p A_{vhi0} - \frac{\lambda_{00}^v}{v!} \sum_{h=1}^p (A_{vhi0}^* \prod_{\substack{g=1 \\ g \neq h}}^p A_{vgi0}) \right) , \end{aligned} \quad (4.41)$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial Q_{10}}{\partial \beta_{h00}} &= - \sum_{i=1}^n s_i e^{\beta_{h00}} + \sum_{i=1}^n \frac{1}{A_{i0}} \frac{\partial A_{i0}}{\partial \beta_{h00}} \\ &= - \sum_{i=1}^n s_i e^{\beta_{h00}} + \sum_{i=1}^n \frac{1}{A_{i0}} \sum_{v=0}^q \left( \frac{\lambda_{00}^v}{v!} A_{vhi0}^* s_i e^{\beta_{h00}} \prod_{\substack{g=1 \\ g \neq h}}^p A_{vgi0} \right) , \end{aligned} \quad (4.42)$$

dimana

$$A_{vhi0}^* = \frac{(y_{hi}-v)(s_i e^{\beta_{h00}} - \lambda_{00})^{y_{hi}-v-1}}{(y_{hi}-v)!} ; h = 1, 2, \dots, p.$$

Memperhatikan persamaan (4.41) dan (4.42) dan disamakan nol merupakan sistem persamaan tidak *close form*, sehingga MLE tidak dapat menghasilkan penyelesaian analitik. Oleh karena itu untuk menentukan estimasi parameter dapat digunakan algoritma *Newton-Raphson* dengan formula sebagai berikut :

$$\hat{\theta}_{102(t+1)} = \hat{\theta}_{102(t)} - \mathbf{H}^{-1}(\hat{\theta}_{102(t)}) \mathbf{g}(\hat{\theta}_{102(t)}), \quad (4.43)$$

dimana

$\hat{\theta}_{102(t)}$  adalah estimator parameter pada iterasi ke- $t$ ,

$\mathbf{g}^T(\hat{\boldsymbol{\theta}}_{102(t)}) = \begin{bmatrix} \frac{\partial Q_{10}}{\partial \lambda_{00}} & \frac{\partial Q_{10}}{\partial \beta_{100}} & \dots & \frac{\partial Q_{10}}{\partial \beta_{p00}} \end{bmatrix}_{\boldsymbol{\theta}_{102} = \hat{\boldsymbol{\theta}}_{102(t)}}$  adalah vektor gradien pada

iterasi ke- $t$ , dengan elemen vektor diperoleh dari persamaan (4.41) dan (4.42), dan

$$\mathbf{H}(\hat{\boldsymbol{\theta}}_{102(t)}) = \begin{bmatrix} \frac{\partial^2 Q_{10}}{\partial \lambda_{00}^2} & \frac{\partial^2 Q_{10}}{\partial \lambda_{00} \partial \beta_{100}} & \dots & \frac{\partial^2 Q_{10}}{\partial \lambda_{00} \partial \beta_{p00}} \\ \frac{\partial^2 Q_{10}}{\partial \lambda_{00} \partial \beta_{100}} & \frac{\partial^2 Q_{10}}{\partial \beta_{100}^2} & \dots & \frac{\partial^2 Q_{10}}{\partial \beta_{100} \partial \beta_{p00}} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial^2 Q_{10}}{\partial \lambda_{00} \partial \beta_{p00}} & \frac{\partial^2 Q_{10}}{\partial \beta_{100} \partial \beta_{p00}} & \dots & \frac{\partial^2 Q_{10}}{\partial \beta_{p00}^2} \end{bmatrix}_{\boldsymbol{\theta}_{102} = \hat{\boldsymbol{\theta}}_{102(t)}}$$

adalah matriks Hessian, dimana masing-masing elemen matriks diperoleh dari turunan parsial kedua  $Q_{10}$  terhadap kombinasi parameternya, sebagai berikut :

$$\frac{\partial^2 Q_{10}}{\partial \lambda_{00}^2} = \sum_{i=1}^n \left( \frac{1}{A_{i0}} \frac{\partial^2 A_{i0}}{\partial \lambda_{00}^2} - \frac{1}{A_{i0}^2} \left( \frac{\partial A_{i0}}{\partial \lambda_{00}} \right)^2 \right), \quad (4.44)$$

$$\frac{\partial^2 Q_{10}}{\partial \beta_{h00}^2} = - \sum_{i=1}^n e^{\beta_{h00}} + \sum_{i=1}^n \left( \frac{1}{A_{i0}} \frac{\partial^2 A_{i0}}{\partial \beta_{h00}^2} - \frac{1}{A_{i0}^2} \left( \frac{\partial A_{i0}}{\partial \beta_{h00}} \right)^2 \right), \quad (4.45)$$

$$\frac{\partial^2 Q_{10}}{\partial \lambda_{00} \partial \beta_{h00}} = \sum_{i=1}^n \left( \frac{1}{A_{i0}} \frac{\partial^2 A_{i0}}{\partial \lambda_{00} \partial \beta_{h00}} - \frac{1}{A_{i0}^2} \frac{\partial A_{i0}}{\partial \lambda_{00}} \frac{\partial A_{i0}}{\partial \beta_{h00}} \right), \quad (4.46)$$

untuk  $g, h = 1, 2, \dots, p ; g \neq h$ ,

$$\frac{\partial^2 Q_{10}}{\partial \beta_{h00} \partial \beta_{g00}^T} = \sum_{i=1}^n \left( \frac{1}{A_{i0}} \frac{\partial^2 A_{i0}}{\partial \beta_{h00} \partial \beta_{g00}} - \frac{1}{A_{i0}^2} \frac{\partial A_{i0}}{\partial \beta_{h00}} \frac{\partial A_{i0}}{\partial \beta_{g00}} \right). \quad (4.47)$$

Turunan parsial kedua dari  $A_{i0}$  terhadap masing-masing kombinasi parameternya, sebagai berikut :

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 A_{i0}}{\partial \lambda_{00}^2} = & \sum_{v=0}^q \left( \frac{v(v-1)\lambda_{00}^{v-2}}{v!} \prod_{h=1}^p A_{vhi0} - \frac{2v\lambda_{00}^{v-1}}{v!} \sum_{h=1}^p (A_{vhi0}^* \prod_{\substack{g=1 \\ g \neq h}}^p A_{vgi0}) + \right. \\ & \left. \frac{\lambda_{00}^v}{v!} \left( \sum_{h=1}^p (A_{vhi0}^{**} \prod_{\substack{g=1 \\ g \neq h}}^p A_{vgi0}) + \sum_{h=1}^p \sum_{\substack{g=1 \\ g \neq h}}^p A_{vhi0}^* (A_{vgi0}^* \prod_{\substack{t=1 \\ t \neq h, g}}^p A_{vti0}) \right) \right), \end{aligned} \quad (4.48)$$

$$\frac{\partial^2 A_{i0}}{\partial \beta_{h00}^2} = \sum_{v=0}^q \left( \frac{\lambda_{00}^v}{v!} \left( A_{vhi0}^{**} s_i^2 e^{2\beta_{h00}} + A_{vhi0}^* s_i e^{\beta_{h00}} \right) \prod_{\substack{g=1 \\ g \neq h}}^p A_{vgi0} \right), \quad (4.49)$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 A_{i0}}{\partial \lambda_{00} \partial \beta_{h00}} &= \sum_{v=0}^q \left( \frac{v \lambda_{00}^{v-1}}{v!} A_{vhi0}^* s_i e^{\beta_{h00}} \prod_{\substack{g=1 \\ g \neq h}}^p A_{vgi0} - \frac{\lambda_{00}^v}{v!} A_{vhi0}^{**} s_i e^{\beta_{h00}} \prod_{\substack{g=1 \\ g \neq h}}^p A_{vgi0} - \right. \\ &\quad \left. \frac{\lambda_{00}^v}{v!} A_{vhi0}^* s_i e^{\beta_{h00}} \sum_{\substack{g=1 \\ g \neq h}}^p \left( A_{vgi0}^* \prod_{\substack{t=1 \\ t \neq g, h}}^p A_{vti0} \right) \right), \end{aligned} \quad (4.50)$$

$$\frac{\partial^2 A_{i0}}{\partial \beta_{h00} \partial \beta_{g00}} = \sum_{v=0}^q \left( \frac{\lambda_{00}^v}{v!} A_{vhi0}^* s_i e^{\beta_{h00}} A_{vgi0}^* s_i e^{\beta_{g00}} \prod_{\substack{t=1 \\ t \neq h, g}}^p A_{vti0} \right), \quad (4.51)$$

dimana

$$A_{vhi0}^{**} = \frac{(y_{hi} - v)(y_{hi} - v - 1)(s_i e^{\beta_{h00}} - \lambda_{00})^{(y_{hi} - v - 2)}}{(y_{hi} - v)!}.$$

Proses iterasi *Newton-Raphson* pada persamaan (4.43), dimulai dengan memasukkan nilai awal estimator parameter, yaitu :

$$\hat{\boldsymbol{\theta}}_{102(0)} = [\hat{\lambda}_{00(0)} \quad \hat{\beta}_{100(0)} \quad \hat{\beta}_{200(0)} \quad \dots \quad \hat{\beta}_{p00(0)}]^T$$

dimana

$$\hat{\lambda}_{00(0)} = \widehat{\text{cov}}[\mathbf{y}_g^*, \mathbf{y}_h^*]; g, h = 1, 2, \dots, p; g \neq h \text{ dan } \hat{\beta}_{h00(0)} = \ln(\overline{y_h^*}),$$

dengan  $\mathbf{y}_h^* = [y_{h1}^* \quad y_{h2}^* \quad \dots \quad y_{hn}^*]^T$  adalah vektor variabel respon baru dengan elemen-elemen sebagai berikut :

$$y_{hi}^* = \begin{cases} \ln(y_{hi}/s_i) & ; y_{hi} = 1, 2, 3, \dots \\ 0 & ; y_{hi} = 0 \end{cases},$$

dan proses iterasi tersebut dihentikan jika  $\|\hat{\boldsymbol{\theta}}_{102(t+1)} - \hat{\boldsymbol{\theta}}_{102(t)}\| \leq \varepsilon$ , dengan  $\varepsilon$  bilangan riil positif yang sangat kecil.

- Himpunan parameter di bawah populasi adalah  $\Omega_1 = \{\lambda_0, \boldsymbol{\beta}_h; h=1, 2, \dots, p\}$ , sehingga nilai maksimum fungsi likelihood dapat dituliskan:

$$\begin{aligned} L(\Omega_1) &= \prod_{i=1}^n f(y_{hi} | \lambda_0, \boldsymbol{\beta}_h) \\ &= \prod_{i=1}^n \left( A_i \exp((p-1)\lambda_0 - \sum_{h=1}^p s_i e^{x_i^T \boldsymbol{\beta}_h}) \right), \end{aligned} \quad (4.52)$$

dimana

$$A_i = \sum_{v=0}^q \frac{\lambda_0^v \prod_{h=1}^p (s_i e^{\mathbf{x}_i^T \hat{\boldsymbol{\beta}}_h} - \lambda_0)^{y_{hi}-v}}{v! \prod_{h=1}^p (y_{hi} - v)!}.$$

Misalkan  $\hat{\boldsymbol{\theta}}_1 = [\hat{\lambda}_0 \quad \hat{\boldsymbol{\beta}}_1^T \quad \hat{\boldsymbol{\beta}}_2^T \quad \dots \quad \hat{\boldsymbol{\beta}}_p^T]^T$  merupakan estimator MLE dari parameter pada populasi, maka

$$L(\hat{\boldsymbol{\theta}}_1) = \text{maks } L(\Omega_1) \\ = \prod_{i=1}^n \left( \hat{A}_i \exp((p-1)\hat{\lambda}_0 - \sum_{h=1}^p s_i e^{\mathbf{x}_i^T \hat{\boldsymbol{\beta}}_h}) \right), \quad (4.53)$$

dimana

$$\hat{A}_i = \sum_{v=0}^q \frac{\hat{\lambda}_0^v \prod_{h=1}^p (s_i e^{\mathbf{x}_i^T \hat{\boldsymbol{\beta}}_h} - \hat{\lambda}_0)^{y_{hi}-v}}{v! \prod_{h=1}^p (y_{hi} - v)!}.$$

$\hat{\lambda}_0$  dan  $\hat{\boldsymbol{\beta}}_h$  pada (4.53) merupakan estimator untuk  $\lambda_0$  dan  $\boldsymbol{\beta}_h$  yang diperoleh dari algoritma *Newton-Raphson* pada persamaan (4.13).

- Statistik uji LRT diformulasikan sebagai berikut :

$$G_1 = -2 \ln \frac{L(\hat{\boldsymbol{\theta}}_{102})}{L(\hat{\boldsymbol{\theta}}_1)} \\ = 2 \left( \ln L(\hat{\boldsymbol{\theta}}_1) - \ln L(\hat{\boldsymbol{\theta}}_{102}) \right), \quad (4.54)$$

Berdasarkan nilai maksimum pada persamaan (4.39) dan (4.53), maka statistik uji pada persamaan (4.54) dapat dituliskan:

$$G_1 = 2 \left( \left( n(p-1)\hat{\lambda}_0 - \sum_{i=1}^n \sum_{h=1}^p s_i e^{\mathbf{x}_i^T \hat{\boldsymbol{\beta}}_h} + \sum_{i=1}^n \ln \hat{A}_i \right) - \left( n(p-1)\hat{\lambda}_{00} - \sum_{i=1}^n \sum_{h=1}^p s_i e^{\hat{\boldsymbol{\beta}}_{h00}} + \sum_{i=1}^n \ln \hat{A}_{i0} \right) \right) \\ = 2 \left( n(p-1)(\hat{\lambda}_0 - \hat{\lambda}_{00}) - \sum_{i=1}^n \sum_{h=1}^p s_i (e^{\mathbf{x}_i^T \hat{\boldsymbol{\beta}}_h} - e^{\hat{\boldsymbol{\beta}}_{h00}}) + \sum_{i=1}^n (\ln \hat{A}_i - \ln \hat{A}_{i0}) \right), \quad (4.55)$$

dimana

$$\hat{A}_{i0} = \sum_{v=0}^q \frac{\hat{\lambda}_{00}^v \prod_{h=1}^p (s_i e^{\hat{\boldsymbol{\beta}}_{h00}} - \hat{\lambda}_{00})^{y_{hi}-v}}{v! \prod_{h=1}^p (y_{hi} - v)!} \quad \text{dan} \quad \hat{A}_i = \sum_{v=0}^q \frac{\hat{\lambda}_0^v \prod_{h=1}^p (s_i e^{\mathbf{x}_i^T \hat{\boldsymbol{\beta}}_h} - \hat{\lambda}_0)^{y_{hi}-v}}{v! \prod_{h=1}^p (y_{hi} - v)!}.$$

### Daerah Kritis Uji Serentak

Daerah kritis uji LRT dengan tingkat signifikansi  $\alpha \in (0,1)$  untuk model MPR dengan kovariansi merupakan konstanta yang diformulasikan pada persamaan (4.37), didefinisikan sebagai berikut :

$$\Lambda_1 = \frac{\max L(\omega_1)}{\max L(\Omega_1)} < k_\alpha, \quad (4.56)$$

dimana  $k_\alpha$  merupakan suatu konstanta yang nilainya tergantung pada  $\alpha$  dengan  $0 \leq k_\alpha \leq 1$ .

Berdasarkan persamaan (4.56), statistik uji  $G_1$  yang merupakan fungsi dari variabel random, dapat dituliskan :

$$G_1 = -2 \ln \Lambda_1. \quad (4.57)$$

Distribusi dari statistik uji  $G_1$  dituliskan dalam Teorema berikut :

#### Teorema 4.1

Misalkan  $\hat{\theta}_{102((p+1) \times 1)} = [\hat{\lambda}_{00} \quad \hat{\beta}_{100} \quad \hat{\beta}_{200} \quad \dots \quad \hat{\beta}_{p00}]^T$ , dan

$\hat{\theta}_{1((pk+p+1) \times 1)} = [\hat{\lambda}_0 \quad \hat{\beta}_1^T \quad \hat{\beta}_2^T \quad \dots \quad \hat{\beta}_p^T]^T$  berturut-turut merupakan estimator MLE pada  $H_0$  dan populasi dari pengujian hipotesis yang diformulasikan pada persamaan (4.37), maka statistik uji  $G_1$  yang disajikan pada persamaan (4.55) berdistribusi  $\chi_{pk}^2$ .

#### Bukti Teorema 4.1

Misalkan estimator MLE pada populasi dari pengujian hipotesis dipartisi sebagai berikut :

$$\hat{\theta}_1 = [\hat{\theta}_{11} \quad \hat{\theta}_{12}]^T,$$

dimana

$$\hat{\theta}_{11} = [\hat{\beta}_{h1} \quad \hat{\beta}_{h2} \quad \dots \quad \hat{\beta}_{hk} ; h=1,2,\dots,p]^T, \text{ dan}$$

$$\hat{\theta}_{12} = [\hat{\lambda}_0 \quad \hat{\beta}_{10} \quad \hat{\beta}_{20} \quad \dots \quad \hat{\beta}_{p0}]^T.$$

Jika estimator MLE dan parameter yang diketahui pada  $H_0$  dipartisi sebagai berikut :

$$\hat{\theta}_{10} = [\theta_{101} \quad \theta_{102}]^T,$$

dimana

$$\boldsymbol{\theta}_{101(pk \times 1)} = [0 \ 0 \ \dots \ 0]^T \text{ dan}$$

$$\hat{\boldsymbol{\theta}}_{102} = [\hat{\lambda}_{00} \ \hat{\beta}_{100} \ \hat{\beta}_{200} \ \dots \ \hat{\beta}_{p00}]^T,$$

maka pengujian hipotesis pada persamaan (4.37) dapat dituliskan sebagai :

$$\begin{aligned} H_0 : \boldsymbol{\theta}_{11} &= \boldsymbol{\theta}_{101} \\ H_1 : \boldsymbol{\theta}_{11} &\neq \boldsymbol{\theta}_{101} \end{aligned} \quad (4.58)$$

Statistik uji  $G_1$  yang disajikan pada persamaan (4.54) dapat diuraikan sebagai berikut :

$$\begin{aligned} G_1 &= 2 \left( \ln L(\hat{\boldsymbol{\theta}}_1) - \ln L(\hat{\boldsymbol{\theta}}_{10}) \right) \\ &= 2 \left( \ln L(\hat{\boldsymbol{\theta}}_1) - \ln L(\boldsymbol{\theta}_{10}) \right) - 2 \left( \ln L(\hat{\boldsymbol{\theta}}_{10}) - \ln L(\boldsymbol{\theta}_{10}) \right). \end{aligned} \quad (4.59)$$

Misalkan  $l(\boldsymbol{\theta}_{10}) = \ln L(\boldsymbol{\theta}_{10})$ , maka fungsi  $l(\boldsymbol{\theta}_{10})$  dapat dihipotesis oleh ekspansi Taylor derajat dua disekitar  $\hat{\boldsymbol{\theta}}_1$  sebagai berikut :

$$l(\boldsymbol{\theta}_{10}) \approx l(\hat{\boldsymbol{\theta}}_1) + \mathbf{g}(\hat{\boldsymbol{\theta}}_1)(\boldsymbol{\theta}_{10} - \hat{\boldsymbol{\theta}}_1) - \frac{1}{2}(\boldsymbol{\theta}_{10} - \hat{\boldsymbol{\theta}}_1)^T \mathbf{I}(\hat{\boldsymbol{\theta}}_1)(\boldsymbol{\theta}_{10} - \hat{\boldsymbol{\theta}}_1),$$

$$\text{dimana } \mathbf{g}(\hat{\boldsymbol{\theta}}_1) = \left. \frac{\partial l(\boldsymbol{\theta}_1)}{\partial \boldsymbol{\theta}_1} \right|_{\boldsymbol{\theta}_1 = \hat{\boldsymbol{\theta}}_1} \text{ dan } \mathbf{I}(\hat{\boldsymbol{\theta}}_1) = - \left. \frac{\partial^2 l(\boldsymbol{\theta}_1)}{\partial \boldsymbol{\theta}_1 \partial \boldsymbol{\theta}_1^T} \right|_{\boldsymbol{\theta}_1 = \hat{\boldsymbol{\theta}}_1}.$$

Karena  $\mathbf{g}(\hat{\boldsymbol{\theta}}_1) = \mathbf{0}$ , sehingga diperoleh :

$$2 \left( l(\hat{\boldsymbol{\theta}}_1) - l(\boldsymbol{\theta}_{10}) \right) \approx (\hat{\boldsymbol{\theta}}_1 - \boldsymbol{\theta}_{10})^T \mathbf{I}(\hat{\boldsymbol{\theta}}_1)(\hat{\boldsymbol{\theta}}_1 - \boldsymbol{\theta}_{10}). \quad (4.60)$$

Sedangkan jika fungsi  $l(\boldsymbol{\theta}_{10})$  dihipotesis oleh ekspansi Taylor derajat dua disekitar  $\hat{\boldsymbol{\theta}}_{10}$  diperoleh :

$$l(\boldsymbol{\theta}_{10}) \approx l(\hat{\boldsymbol{\theta}}_{10}) + \mathbf{g}(\hat{\boldsymbol{\theta}}_{10})(\boldsymbol{\theta}_{10} - \hat{\boldsymbol{\theta}}_{10}) - \frac{1}{2}(\boldsymbol{\theta}_{10} - \hat{\boldsymbol{\theta}}_{10})^T \mathbf{I}(\hat{\boldsymbol{\theta}}_{10})(\boldsymbol{\theta}_{10} - \hat{\boldsymbol{\theta}}_{10}),$$

atau dapat ditulis:

$$2 \left( l(\hat{\boldsymbol{\theta}}_{10}) - l(\boldsymbol{\theta}_{10}) \right) \approx (\hat{\boldsymbol{\theta}}_{10} - \boldsymbol{\theta}_{10})^T \mathbf{I}(\hat{\boldsymbol{\theta}}_{10})(\hat{\boldsymbol{\theta}}_{10} - \boldsymbol{\theta}_{10}). \quad (4.61)$$

Berdasarkan persamaan (4.60) dan (4.61), statistik uji pada persamaan (4.59) dapat ditulis sebagai berikut :

$$G_1 \approx (\hat{\boldsymbol{\theta}}_1 - \boldsymbol{\theta}_{10})^T \mathbf{I}(\hat{\boldsymbol{\theta}}_1)(\hat{\boldsymbol{\theta}}_1 - \boldsymbol{\theta}_{10}) - (\hat{\boldsymbol{\theta}}_{10} - \boldsymbol{\theta}_{10})^T \mathbf{I}(\hat{\boldsymbol{\theta}}_{10})(\hat{\boldsymbol{\theta}}_{10} - \boldsymbol{\theta}_{10}). \quad (4.62)$$

Misalkan,

$$\mathbf{I}(\hat{\boldsymbol{\theta}}_1)_{(pk+p+1) \times (pk+p+1)} = \begin{bmatrix} I_{11(pk \times pk)} & I_{12(pk \times (p+1))} \\ I_{21((p+1) \times pk)} & I_{22((p+1) \times (p+1))} \end{bmatrix}, \text{ dan}$$

$$\mathbf{I}^{-1}(\hat{\boldsymbol{\theta}}_1)_{(pk+p+1) \times (pk+p+1)} = \begin{bmatrix} I^{11}_{(pk \times pk)} & I^{12}_{(pk \times (p+1))} \\ I^{21}_{((p+1) \times pk)} & I^{22}_{((p+1) \times (p+1))} \end{bmatrix},$$

dan berdasarkan sifat distribusi bersyarat, jika diberikan  $\boldsymbol{\theta}_{11} = \boldsymbol{\theta}_{101}$ ,  $\hat{\boldsymbol{\theta}}_{11}$ , dan  $\hat{\boldsymbol{\theta}}_{12}$ , maka diperoleh :

$$\hat{\boldsymbol{\theta}}_{102} = \hat{\boldsymbol{\theta}}_{12} - I^{21}(I^{11})^{-1}(\hat{\boldsymbol{\theta}}_{11} - \boldsymbol{\theta}_{101}), \quad (4.63)$$

atau dengan memperhatikan formula dari invers suatu partisi matriks, persamaan (4.63) dapat ditulis :

$$\hat{\boldsymbol{\theta}}_{102} = \hat{\boldsymbol{\theta}}_{12} + I_{22}^{-1}I_{21}(\hat{\boldsymbol{\theta}}_{11} - \boldsymbol{\theta}_{101}). \quad (4.64)$$

Pada pengujian hipotesis di bawah  $H_0$ , karena  $(\hat{\boldsymbol{\theta}}_{10} - \boldsymbol{\theta}_{10}) = (\boldsymbol{\theta}, \hat{\boldsymbol{\theta}}_{102} - \boldsymbol{\theta}_{12})$ , dan memperhatikan persamaan (4.64), yaitu :

$$\begin{aligned} \hat{\boldsymbol{\theta}}_{102} - \boldsymbol{\theta}_{12} &= \hat{\boldsymbol{\theta}}_{12} - \boldsymbol{\theta}_{12} + I_{22}^{-1}I_{21}(\hat{\boldsymbol{\theta}}_{11} - \boldsymbol{\theta}_{101}), \text{ maka} \\ (\hat{\boldsymbol{\theta}}_{10} - \boldsymbol{\theta}_{10})^T \mathbf{I}(\hat{\boldsymbol{\theta}}_1)(\hat{\boldsymbol{\theta}}_{10} - \boldsymbol{\theta}_{10}) &= (\hat{\boldsymbol{\theta}}_{102} - \boldsymbol{\theta}_{12})^T I_{22}(\hat{\boldsymbol{\theta}}_{102} - \boldsymbol{\theta}_{12}) \\ &= \begin{bmatrix} \hat{\boldsymbol{\theta}}_{11} - \boldsymbol{\theta}_{101} \\ \hat{\boldsymbol{\theta}}_{12} - \boldsymbol{\theta}_{12} \end{bmatrix}^T \begin{bmatrix} I_{12}I_{22}^{-1}I_{21} & I_{12} \\ I_{21} & I_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \hat{\boldsymbol{\theta}}_{11} - \boldsymbol{\theta}_{101} \\ \hat{\boldsymbol{\theta}}_{12} - \boldsymbol{\theta}_{12} \end{bmatrix} \end{aligned}$$

Statistik uji  $G_1$  pada persamaan (4.62) dapat dituliskan sebagai berikut :

$$\begin{aligned} G_1 &\approx (\hat{\boldsymbol{\theta}}_{11} - \boldsymbol{\theta}_{101})^T (I_{11} - I_{12}I_{22}^{-1}I_{21})(\hat{\boldsymbol{\theta}}_{11} - \boldsymbol{\theta}_{101}) \\ &= (\hat{\boldsymbol{\theta}}_{11} - \boldsymbol{\theta}_{101})^T (I^{11})^{-1}(\hat{\boldsymbol{\theta}}_{11} - \boldsymbol{\theta}_{101}) \end{aligned} \quad (4.65)$$

Memperhatikan sifat normalitas untuk MLE pada persamaan (2.63), maka distribusi dari partisi parameter adalah :

$$\begin{bmatrix} \hat{\boldsymbol{\theta}}_{11} - \boldsymbol{\theta}_{11} \\ \hat{\boldsymbol{\theta}}_{12} - \boldsymbol{\theta}_{12} \end{bmatrix} \stackrel{a}{\sim} N \left( \boldsymbol{\theta}, \mathbf{I}^{-1}(\boldsymbol{\theta}_0) \equiv \begin{bmatrix} I^{11} & I^{12} \\ I^{21} & I^{22} \end{bmatrix} \right).$$

Sehingga diperoleh :

$$\begin{aligned} (\hat{\boldsymbol{\theta}}_{11} - \boldsymbol{\theta}_{11}) &\stackrel{a}{\sim} N(\boldsymbol{\theta}, I^{11}) \\ (I^{11})^{-1/2}(\hat{\boldsymbol{\theta}}_{11} - \boldsymbol{\theta}_{11}) &\stackrel{a}{\sim} N(\boldsymbol{\theta}, \mathbf{I}_{pk}) \\ G_1 &= (\hat{\boldsymbol{\theta}}_{11} - \boldsymbol{\theta}_{101})^T (I^{11})^{-1}(\hat{\boldsymbol{\theta}}_{11} - \boldsymbol{\theta}_{101}) \stackrel{a}{\sim} \chi_{pk}^2 \quad \blacksquare \end{aligned}$$

Daerah kritis uji serentak diperoleh dengan memperhatikan persamaan (4.56), sebagai berikut :

$$\begin{aligned}
\alpha &= P(\Lambda_1 < k_\alpha ; \omega_1) \\
&= P(-2 \ln \Lambda_1 > -2 \ln k_\alpha ; \omega_1) \\
&= P(G_1 > c_1 ; \omega_1), \text{ dengan } c_1 = -2 \ln k_\alpha \\
&= P(G_1 > \chi_{pk, \alpha}^2).
\end{aligned} \tag{4.66}$$

Berdasarkan persamaan (4.66), daerah kritis uji serentak model MPR dengan kovariansi merupakan konstanta adalah :

$$H_0 \text{ ditolak jika nilai } G_1 > \chi_{pk, \alpha}^2. \tag{4.67}$$

### Statistik Uji Parsial

Pengujian parsial model MPR dengan kovariansi merupakan konstanta digunakan untuk menguji apakah masing-masing parameter  $\beta_{hl} (h=1, 2, \dots, p ; l=1, 2, \dots, k)$  berpengaruh terhadap model. Formulasi pengujian parsial, misalnya untuk nilai  $h=m$  dapat dituliskan:

$$\begin{aligned}
H_0 : \beta_{ml} &= 0, \\
H_1 : \beta_{ml} &\neq 0.
\end{aligned} \tag{4.68}$$

Jika  $\hat{\theta}_{104} = (\hat{\lambda}_{00}, \hat{\beta}_{h00}, \hat{\beta}_{h01}, \dots, \hat{\beta}_{m0(l-1)}, \hat{\beta}_{m0(l+1)}, \dots, \hat{\beta}_{h0k} ; h=1, 2, \dots, p)^T$  dan

$\hat{\theta}_1 = (\hat{\lambda}_0, \hat{\beta}_h ; h=1, 2, \dots, p)^T$  berturut-turut merupakan estimator MLE dari parameter pada  $H_0$  dan populasi.

Analog dengan pembuktian pada Teorema 4.1, dengan membuat partisi estimator di bawah populasi menjadi :  $\hat{\theta}_1 = [\hat{\theta}_{13} \quad \hat{\theta}_{14}]^T$ ,

dimana  $\hat{\theta}_{13} = [\hat{\beta}_{ml}]$  dan  $\hat{\theta}_{14} = (\hat{\lambda}_{00}, \hat{\beta}_{h0}, \hat{\beta}_{h1}, \dots, \hat{\beta}_{m(l-1)}, \hat{\beta}_{m(l+1)}, \dots, \hat{\beta}_{hk})^T$ ,

sedangkan estimator MLE dan parameter yang diketahui pada  $H_0$  dibuat partisi menjadi :  $\hat{\theta}_{10} = [\theta_{103} \quad \theta_{104}]^T$ ,

dimana  $\theta_{103} = [0]$  dan  $\theta_{104} = (\hat{\lambda}_{00}, \hat{\beta}_{h00}, \hat{\beta}_{h01}, \dots, \hat{\beta}_{m0(l-1)}, \hat{\beta}_{m0(l+1)}, \dots, \hat{\beta}_{h0k})^T$

maka statistik uji LR untuk menguji hipotesis (4.68) dapat dituliskan sebagai berikut :



$$\begin{aligned}
G_{11} &\approx (\hat{\boldsymbol{\theta}}_{13} - \boldsymbol{\theta}_{103})^T (I_{11} - I_{12} I_{22}^{-1} I_{21}) (\hat{\boldsymbol{\theta}}_{13} - \boldsymbol{\theta}_{103}) \\
&= (\hat{\boldsymbol{\theta}}_{13} - \boldsymbol{\theta}_{103})^T (I^{11})^{-1} (\hat{\boldsymbol{\theta}}_{13} - \boldsymbol{\theta}_{103})
\end{aligned} \tag{4.69}$$

dimana,

$$\begin{aligned}
\mathbf{I}(\hat{\boldsymbol{\theta}}_1)_{(pk+p+1) \times (pk+p+1)} &= \begin{bmatrix} I_{11(1 \times 1)} & I_{12(1 \times p(k+1))} \\ I_{21(p(k+1) \times 1)} & I_{22(p(k+1) \times p(k+1))} \end{bmatrix}, \text{ dan} \\
\mathbf{I}^{-1}(\hat{\boldsymbol{\theta}}_1)_{(pk+p+1) \times (pk+p+1)} &= \begin{bmatrix} I^{11}_{(1 \times 1)} & I^{12}_{(1 \times p(k+1))} \\ I^{21}_{(p(k+1) \times 1)} & I^{22}_{(p(k+1) \times p(k+1))} \end{bmatrix}.
\end{aligned}$$

Berdasarkan sifat normalitas untuk MLE pada persamaan (2.63), dan memperhatikan persamaan (4.69) dengan vektor  $\boldsymbol{\theta}_{13}$  hanya mempunyai satu elemen, yaitu:  $\beta_{ml}$ , maka statistik uji untuk hipotesis pada persamaan (4.68) dapat dituliskan sebagai :

$$G_{11} = \frac{\hat{\beta}_{ml}^2}{\widehat{\text{var}}[\hat{\beta}_{ml}]} \sim \chi_1^2 \tag{4.70}$$

atau dapat juga menggunakan akar kuadrat dari persamaan (4.70), sehingga diperoleh statistik uji :

$$Z_1 = \frac{\hat{\beta}_{ml}}{\sqrt{\widehat{\text{var}}[\hat{\beta}_{ml}]}} \sim N(0,1) \tag{4.71}$$

dimana  $\widehat{\text{var}}[\hat{\beta}_{ml}]$  diperoleh dari elemen diagonal ke  $[(k+1)(m-1) + (l+2)]$  dari matriks  $[\mathbf{I}(\boldsymbol{\theta}_1)]^{-1}$ .

### Daerah Kritis Uji Parsial

Daerah kritis uji parsial dengan tingkat signifikansi  $\alpha \in (0,1)$  untuk model MPR dengan kovariansi merupakan konstanta yang diformulasikan pada persamaan (4.68), dapat dituliskan sebagai berikut :

$$\begin{aligned}
\alpha &= P(G_{11} > c_1 ; \omega_{11}) \\
&= P(Z_1 < -\sqrt{c_1} \vee Z_1 > \sqrt{c_1} ; \omega_{11}), \\
&= P(Z_1 < -Z_{\alpha/2} \vee Z_1 > Z_{\alpha/2} ) \\
&= P(|Z_1| > Z_{\alpha/2} ).
\end{aligned} \tag{4.72}$$

Berdasarkan persamaan (4.72), maka daerah kritis pengujian hipotesis pada persamaan (4.68) adalah:

$$H_0 \text{ ditolak jika nilai } |Z_1| > Z_{\alpha/2}. \quad (4.73)$$

#### 4.2.2 Pengujian Hipotesis Model MPR dengan Kovariansi Merupakan Fungsi Variabel Bebas

Pengujian secara serentak parameter model MPR dengan kovariansi merupakan fungsi variabel bebas digunakan metode LRT dengan formulasi hipotesis sebagai berikut :

$$\begin{aligned} H_0 : \beta_{c1} = \beta_{c2} = \dots = \beta_{ck} = 0 \quad ; \quad c = 0, 1, 2, \dots, p, \\ H_1 : \text{paling sedikit ada satu } \beta_{cl} \neq 0 \quad ; \quad c = 0, 1, 2, \dots, p \quad ; \quad l = 1, 2, \dots, k. \end{aligned} \quad (4.74)$$

Untuk menentukan daerah kritis dari pengujian hipotesis pada persamaan (4.74) diperlukan statistik uji yang diperoleh dengan metode LRT melalui tahapan sebagai berikut :

- Ruang parameter di bawah  $H_0$  adalah  $\omega_2 = \{\beta_{000}, \beta_{h00} ; h = 1, 2, \dots, p\}$ , sehingga nilai maksimum fungsi likelihood dapat ditentukan melalui proses berikut:

$$\begin{aligned} L(\omega_2) &= \prod_{i=1}^n f(y_{hi}; \beta_{000}, \beta_{h00}) \\ &= \prod_{i=1}^n \left( B_{i0} \exp(-s_i e^{\beta_{000}} - \sum_{h=1}^p s_i e^{\beta_{h00}}) \right), \end{aligned} \quad (4.75)$$

$$\text{dimana } B_{i0} = \sum_{v=0}^q \left( \frac{(s_i e^{\beta_{000}})^v}{v!} \prod_{h=1}^p \frac{(s_i e^{\beta_{h00}})^{y_{hi}-v}}{(y_{hi}-v)!} \right).$$

Misalkan  $\hat{\theta}_{202} = [\hat{\beta}_{000} \quad \hat{\beta}_{100} \quad \hat{\beta}_{200} \quad \dots \quad \hat{\beta}_{p00}]^T$  merupakan estimator MLE dari parameter pada  $H_0$ , maka

$$\begin{aligned} L(\hat{\theta}_{202}) &= \text{maks } L(\omega_2) \\ &= \prod_{i=1}^n \left( \hat{B}_{i0} \exp(-s_i e^{\hat{\beta}_{000}} - \sum_{h=1}^p s_i e^{\hat{\beta}_{h00}}) \right), \end{aligned} \quad (4.76)$$

dimana

$$\hat{B}_{i0} = \sum_{v=0}^q \left( \frac{(s_i e^{\hat{\beta}_{000}})^v}{v!} \prod_{h=1}^p \frac{(s_i e^{\hat{\beta}_{h00}})^{y_{hi}-v}}{(y_{hi}-v)!} \right).$$

$\hat{\beta}_{000}$  dan  $\hat{\beta}_{h00}$  diperoleh dengan memaksimumkan fungsi log-likelihood pada ruang  $\omega_2$ , sebagai berikut :

$$Q_{20} = \ln L(\omega_2) = \sum_{i=1}^n \ln B_{i0} - \sum_{i=1}^n s_i e^{\beta_{000}} - \sum_{i=1}^n \sum_{h=1}^p s_i e^{\beta_{h00}}. \quad (4.77)$$

Misalkan  $B_{i0} = \sum_{v=0}^q \left( B_{v0i0} \prod_{h=1}^p B_{vhi0} \right); i = 1, 2, \dots, n,$

dimana

$$B_{v0i0} = \frac{(s_i e^{\beta_{000}})^v}{v!} \quad \text{dan} \quad B_{vhi0} = \frac{(s_i e^{\beta_{h00}})^{y_{hi}-v}}{(y_{hi}-v)!},$$

maka hasil turunan parsial  $Q_{20}$  terhadap  $\beta_{000}$  dan  $\beta_{h00}$  ( $h = 1, 2, \dots, p$ ) diperoleh :

$$\frac{\partial Q_{20}}{\partial \beta_{000}} = \sum_{i=1}^n \frac{1}{B_{i0}} \frac{\partial B_{i0}}{\partial \beta_{000}} - \sum_{i=1}^n s_i e^{\beta_{000}}, \quad (4.78)$$

$$\frac{\partial Q_{20}}{\partial \beta_{h00}} = \sum_{i=1}^n \frac{1}{B_{i0}} \frac{\partial B_{i0}}{\partial \beta_{h00}} - \sum_{i=1}^n s_i e^{\beta_{h00}}. \quad (4.79)$$

Sementara itu turunan  $B_{i0}$  terhadap  $\beta_{000}$  dan  $\beta_{h00}$  adalah

$$\frac{\partial B_{i0}}{\partial \beta_{000}} = \sum_{v=0}^q \left( \frac{v(s_i e^{\beta_{000}})^{v-1}}{v!} \prod_{h=1}^p B_{vhi0} \right), \quad (4.80)$$

$$\frac{\partial B_{i0}}{\partial \beta_{h00}} = \sum_{v=0}^q \left( B_{v0i0} \frac{(y_{hi}-v)(s_i e^{\beta_{h00}})^{y_{hi}-v-1}}{(y_{hi}-v)!} \prod_{\substack{g=1 \\ g \neq h}}^p B_{vgi0} \right). \quad (4.81)$$

Memperhatikan persamaan (4.78) s.d. (4.81) dan disamakan nol merupakan sistem persamaan tidak *close form*, sehingga MLE tidak dapat menghasilkan penyelesaian analitik. Oleh karena itu untuk menentukan estimasi parameter dapat digunakan algoritma *Newton-Raphson* dengan formula sebagai berikut :

$$\hat{\theta}_{202(t+1)} = \hat{\theta}_{202(t)} - \mathbf{H}^{-1}(\hat{\theta}_{202(t)}) \mathbf{g}(\hat{\theta}_{202(t)}), \quad (4.82)$$

dimana

$\hat{\theta}_{202(t)}$  adalah estimator parameter pada iterasi ke- $t$ ,

$$\mathbf{g}^T(\hat{\boldsymbol{\theta}}_{202(t)}) = \begin{bmatrix} \frac{\partial Q_{20}}{\partial \beta_{000}} & \frac{\partial Q_{20}}{\partial \beta_{100}} & \dots & \frac{\partial Q_{20}}{\partial \beta_{p00}} \end{bmatrix}_{\boldsymbol{\theta}_{202} = \hat{\boldsymbol{\theta}}_{202(t)}} \quad \text{adalah vektor gradien pada}$$

iterasi ke- $t$ , dengan elemen vektor sebagaimana tertulis pada persamaan (4.78) s.d. (4.81), dan

$$\mathbf{H}(\hat{\boldsymbol{\theta}}_{202(t)}) = \begin{bmatrix} \frac{\partial^2 Q_{20}}{\partial \beta_{000}^2} & \frac{\partial^2 Q_{20}}{\partial \beta_{000} \partial \beta_{100}} & \dots & \frac{\partial^2 Q_{20}}{\partial \beta_{000} \partial \beta_{p00}} \\ \frac{\partial^2 Q_{20}}{\partial \beta_{000} \partial \beta_{100}} & \frac{\partial^2 Q_{20}}{\partial \beta_{100}^2} & \dots & \frac{\partial^2 Q_{20}}{\partial \beta_{100} \partial \beta_{p00}} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial^2 Q_{20}}{\partial \beta_{000} \partial \beta_{p00}} & \frac{\partial^2 Q_{20}}{\partial \beta_{100} \partial \beta_{p00}} & \dots & \frac{\partial^2 Q_{20}}{\partial \beta_{p00}^2} \end{bmatrix}_{\boldsymbol{\theta}_{202} = \hat{\boldsymbol{\theta}}_{202(t)}} \quad \text{adalah matriks}$$

Hessian pada iterasi ke- $t$ , dimana elemen matriks diperoleh dari turunan parsial kedua dari  $Q_{20}$  terhadap kombinasi masing-masing parameternya, sebagai berikut :

$$\frac{\partial^2 Q_{20}}{\partial \beta_{000}^2} = \sum_{i=1}^n \left( \frac{1}{B_{i0}} \frac{\partial^2 B_{i0}}{\partial \beta_{000}^2} - \frac{1}{B_{i0}^2} \left( \frac{\partial B_{i0}}{\partial \beta_{000}} \right)^2 - s_i e^{\beta_{000}} \right), \quad (4.83)$$

$$\frac{\partial^2 Q_{20}}{\partial \beta_{h00}^2} = \sum_{i=1}^n \left( \frac{1}{B_{i0}} \frac{\partial^2 B_{i0}}{\partial \beta_{h00}^2} - \frac{1}{B_{i0}^2} \left( \frac{\partial B_{i0}}{\partial \beta_{h00}} \right)^2 - s_i e^{\beta_{h00}} \right), \quad (4.84)$$

$$\frac{\partial^2 Q_{20}}{\partial \beta_{000} \partial \beta_{h00}} = \sum_{i=1}^n \left( \frac{1}{B_{i0}} \frac{\partial^2 B_{i0}}{\partial \beta_{000} \partial \beta_{h00}} - \frac{1}{B_{i0}^2} \frac{\partial B_{i0}}{\partial \beta_{000}} \frac{\partial B_{i0}}{\partial \beta_{h00}} \right), \quad (4.85)$$

untuk  $g, h = 1, 2, \dots, p$  ;  $g \neq h$  ,

$$\frac{\partial^2 Q_{20}}{\partial \beta_{h00} \partial \beta_{g00}} = \sum_{i=1}^n \left( \frac{1}{B_{i0}} \frac{\partial^2 B_{i0}}{\partial \beta_{h00} \partial \beta_{g00}} - \frac{1}{B_{i0}^2} \frac{\partial B_{i0}}{\partial \beta_{h00}} \frac{\partial B_{i0}}{\partial \beta_{g00}} \right). \quad (4.86)$$

Turunan parsial kedua dari  $B_{i0}$  terhadap masing-masing kombinasi parameternya, sebagai berikut :

$$\frac{\partial^2 B_{i0}}{\partial \beta_{000}^2} = \sum_{v=0}^q \left( v^2 \frac{(s_i e^{\beta_{000}})^v}{v!} \prod_{h=1}^p B_{vhi0} \right), \quad (4.87)$$

$$\frac{\partial^2 B_{i0}}{\partial \beta_{h00}^2} = \sum_{v=0}^q \left( (y_{hi} - v)^2 B_{v0i0} \frac{(s_i e^{\beta_{h00}})^{y_{hi}-v}}{(y_{hi}-v)!} \prod_{\substack{g=1 \\ g \neq h}}^p B_{vgi0} \right), \quad (4.88)$$

$$\frac{\partial^2 B_{i0}}{\partial \beta_{000} \partial \beta_{h00}} = \sum_{v=0}^q \left( \frac{v(s_i e^{\beta_{000}})^v (y_{hi} - v)(s_i e^{\beta_{h00}})^{y_{hi}-v}}{v! (y_{hi} - v)!} \prod_{\substack{g=1 \\ g \neq h}}^p B_{vgi0} \right), \quad (4.89)$$

$$\frac{\partial^2 B_{i0}}{\partial \beta_{h00} \partial \beta_{g00}} = \sum_{v=0}^q \left( B_{v0i0} \frac{(y_{hi} - v)(s_i e^{\beta_{h00}})^{y_{hi}-v}}{(y_{hi} - v)!} \frac{(y_{gi} - v)(s_i e^{\beta_{g00}})^{y_{gi}-v}}{(y_{gi} - v)!} \prod_{\substack{t=1 \\ t \neq g, h}}^p B_{vti0} \right). \quad (4.90)$$

Proses iterasi *Newton-Raphson* pada persamaan (4.82), dimulai dengan memasukkan nilai awal estimator parameter, yaitu :

$$\hat{\boldsymbol{\theta}}_{202(0)} = [\hat{\beta}_{000(0)} \quad \hat{\beta}_{100(0)} \quad \hat{\beta}_{200(0)} \quad \dots \quad \hat{\beta}_{p00(0)}]^T$$

dimana

$$\hat{\beta}_{000(0)} = \ln(\overline{y_0^*}), \text{ dengan } \mathbf{y}_0^* = \hat{E}[\mathbf{y}_0 | \mathbf{y}_h, \boldsymbol{\theta}_2], \text{ dan}$$

$$\hat{\beta}_{h00(0)} = \ln(\overline{y_h^* - y_0^*}),$$

dengan  $\mathbf{y}_h^* = [y_{h1}^* \quad y_{h2}^* \quad \dots \quad y_{hn}^*]^T$  adalah vektor variabel respon baru dengan elemen vektor sebagai berikut :

$$y_{hi}^* = \begin{cases} \ln(y_{hi}/s_i) & ; y_{hi} = 1, 2, 3, \dots \\ 0 & ; y_{hi} = 0 \end{cases},$$

dan proses iterasi ini dihentikan jika  $\|\hat{\boldsymbol{\theta}}_{202(t+1)} - \hat{\boldsymbol{\theta}}_{202(t)}\| \leq \varepsilon$ , dengan  $\varepsilon$  bilangan riil positif yang sangat kecil.

- Himpunan parameter di bawah populasi adalah  $\Omega_2 = \{\boldsymbol{\beta}_0, \boldsymbol{\beta}_h ; h=1, 2, \dots, p\}$ , sehingga nilai maksimum fungsi likelihood dapat dituliskan:

$$\begin{aligned} L(\Omega_2) &= \prod_{i=1}^n f(y_{hi} | \boldsymbol{\beta}_0, \boldsymbol{\beta}_h) \\ &= \prod_{i=1}^n \left( B_i \exp(-s_i e^{\mathbf{x}_i^T \boldsymbol{\beta}_0} - \sum_{h=1}^p s_i e^{\mathbf{x}_i^T \boldsymbol{\beta}_h}) \right), \end{aligned} \quad (4.91)$$

$$\text{dimana, } B_i = \sum_{v=0}^q \left( \frac{(s_i e^{\mathbf{x}_i^T \boldsymbol{\beta}_0})^v}{v!} \prod_{h=1}^p \frac{(s_i e^{\mathbf{x}_i^T \boldsymbol{\beta}_h})^{y_{hi}-v}}{(y_{hi} - v)!} \right).$$

Misalkan  $\hat{\boldsymbol{\theta}}_2 = [\hat{\boldsymbol{\beta}}_0^T \quad \hat{\boldsymbol{\beta}}_1^T \quad \hat{\boldsymbol{\beta}}_2^T \quad \dots \quad \hat{\boldsymbol{\beta}}_p^T]^T$  merupakan estimator MLE dari parameter pada populasi, maka

$$\begin{aligned}
L(\hat{\theta}_2) &= \text{maks } L(\Omega_2) \\
&= \prod_{i=1}^n \left( \hat{B}_i \exp(s_i e^{\mathbf{x}_i^T \hat{\beta}_0} - \sum_{h=1}^p s_i e^{\mathbf{x}_i^T \hat{\beta}_h}) \right), \tag{4.92}
\end{aligned}$$

dimana,

$$\hat{B}_i = \sum_{v=0}^q \left( \frac{(s_i e^{\mathbf{x}_i^T \hat{\beta}_0})^v}{v!} \prod_{h=1}^p \frac{(s_i e^{\mathbf{x}_i^T \hat{\beta}_h})^{y_{hi}-v}}{(y_{hi}-v)!} \right).$$

$\hat{\beta}_0$  dan  $\hat{\beta}_h$  pada persamaan (4.92) merupakan estimator untuk  $\beta_0$  dan  $\beta_h$  yang diperoleh dari algoritma *Newton-Raphson* pada persamaan (4.82).

- Berdasarkan nilai maksimum pada persamaan (4.76) dan (4.92), maka statistik uji LRT diformulasikan sebagai berikut :

$$\begin{aligned}
G_2 &= -2 \ln \frac{L(\hat{\theta}_{202})}{L(\hat{\theta}_2)} \\
&= 2 \left( \ln L(\hat{\theta}_2) - \ln L(\hat{\theta}_{202}) \right) \tag{4.93}
\end{aligned}$$

Berdasarkan nilai maksimum pada persamaan (4.76) dan (4.92), maka statistik uji pada persamaan (4.93) dapat dituliskan:

$$\begin{aligned}
G_2 &= 2 \left( \sum_{i=1}^n \left( -s_i e^{\mathbf{x}_i^T \hat{\beta}_0} - \sum_{h=1}^p s_i e^{\mathbf{x}_i^T \hat{\beta}_h} + \ln \hat{B}_i \right) - \sum_{i=1}^n \left( (-s_i e^{\hat{\beta}_{000}} - \sum_{h=1}^p s_i e^{\hat{\beta}_{h00}} + \ln \hat{B}_{i0}) \right) \right) \\
&= 2 \left( \sum_{i=1}^n s_i (e^{\hat{\beta}_{000}} - e^{\mathbf{x}_i^T \hat{\beta}_0}) - \sum_{i=1}^n \sum_{h=1}^p s_i (e^{\mathbf{x}_i^T \hat{\beta}_h} - e^{\hat{\beta}_{h00}}) + \sum_{i=1}^n (\ln \hat{B}_i - \ln \hat{B}_{i0}) \right), \tag{4.94}
\end{aligned}$$

dimana

$$\hat{B}_i = \sum_{v=0}^q \left( \frac{(s_i e^{\mathbf{x}_i^T \hat{\beta}_0})^v}{v!} \prod_{h=1}^p \frac{(s_i e^{\mathbf{x}_i^T \hat{\beta}_h})^{y_{hi}-v}}{(y_{hi}-v)!} \right), \text{ dan}$$

$$\hat{B}_{i0} = \sum_{v=0}^q \left( \frac{(s_i e^{\hat{\beta}_{000}})^v}{v!} \prod_{h=1}^p \frac{(s_i e^{\hat{\beta}_{h00}})^{y_{hi}-v}}{(y_{hi}-v)!} \right).$$

### Daerah Kritis Uji Serentak

Daerah kritis uji LRT dengan tingkat signifikansi  $\alpha \in (0,1)$  untuk model MPR dengan kovariansi merupakan fungsi variabel bebas yang diformulasikan pada persamaan (4.74), didefinisikan sebagai berikut :

$$\Lambda_2 = \frac{\text{maks } L(\omega_2)}{\text{maks } L(\Omega_2)} < k_\alpha, \quad (4.95)$$

dimana  $k_\alpha$  merupakan suatu konstanta yang nilainya tergantung pada  $\alpha$  dengan  $0 \leq k_\alpha \leq 1$ .

Berdasarkan persamaan (4.95), maka statistik uji  $G_2$  yang merupakan fungsi variabel random, dapat dituliskan :

$$G_2 = -2 \ln \Lambda_2. \quad (4.96)$$

Distribusi dari statistik uji  $G_2$  dituliskan dalam Teorema berikut :

#### **Teorema 4.2**

Misalkan  $\hat{\boldsymbol{\theta}}_{2((p+1) \times 1)} = [\hat{\beta}_{000} \quad \hat{\beta}_{100} \quad \hat{\beta}_{200} \quad \dots \quad \hat{\beta}_{p00}]^T$ , dan

$\hat{\boldsymbol{\theta}}_{2((p+1)(k+1) \times 1)} = [\hat{\beta}_0^T \quad \hat{\beta}_1^T \quad \hat{\beta}_2^T \quad \dots \quad \hat{\beta}_p^T]^T$  berturut-turut merupakan estimator MLE pada  $H_0$  dan populasi dari pengujian hipotesis yang diformulasikan pada persamaan (4.37), maka statistik uji  $G_2$  yang disajikan pada persamaan (4.55) berdistribusi  $\chi_{(p+1)k}^2$ .

#### **Bukti Teorema 4.2**

Misalkan estimator MLE pada populasi dari pengujian hipotesis dipartisi sebagai berikut :

$$\hat{\boldsymbol{\theta}}_2 = [\hat{\boldsymbol{\theta}}_{21} \quad \hat{\boldsymbol{\theta}}_{22}]^T,$$

dimana  $\hat{\boldsymbol{\theta}}_{21} = [\hat{\beta}_{c1} \quad \hat{\beta}_{c2} \quad \dots \quad \hat{\beta}_{ck}]^T$ ;  $c = 0, 1, 2, \dots, p$ , dan

$$\hat{\boldsymbol{\theta}}_{22} = [\hat{\beta}_{00} \quad \hat{\beta}_{10} \quad \hat{\beta}_{20} \quad \dots \quad \hat{\beta}_{p0}]^T,$$

sedangkan estimator MLE dan parameter yang diketahui pada  $H_0$  dipartisi sebagai berikut :

$$\hat{\boldsymbol{\theta}}_{20} = [\boldsymbol{\theta}_{201} \quad \boldsymbol{\theta}_{202}]^T,$$

dimana  $\boldsymbol{\theta}_{201((p+1)k \times 1)} = [0 \quad 0 \quad \dots \quad 0]^T$  dan  $\hat{\boldsymbol{\theta}}_{202} = [\hat{\beta}_{000} \quad \hat{\beta}_{100} \quad \hat{\beta}_{200} \quad \dots \quad \hat{\beta}_{p00}]^T$ ,

maka pengujian hipotesis pada persamaan (4.74) dapat dituliskan sebagai :

$$\begin{aligned} H_0 : \boldsymbol{\theta}_{21} &= \boldsymbol{\theta}_{201} \\ H_1 : \boldsymbol{\theta}_{21} &\neq \boldsymbol{\theta}_{201} \end{aligned} \quad (4.97)$$

Analog dengan bukti Teorema 4.1, statistik uji  $G_2$  yang disajikan pada persamaan (4.93) dapat diuraikan sebagai berikut :

$$\begin{aligned} G_2 &\approx (\hat{\boldsymbol{\theta}}_2 - \boldsymbol{\theta}_{20})^T \mathbf{I}(\hat{\boldsymbol{\theta}}_2)(\hat{\boldsymbol{\theta}}_2 - \boldsymbol{\theta}_{20}) - (\hat{\boldsymbol{\theta}}_{20} - \boldsymbol{\theta}_{20})^T \mathbf{I}(\hat{\boldsymbol{\theta}}_2)(\hat{\boldsymbol{\theta}}_{20} - \boldsymbol{\theta}_{20}). \\ &= (\hat{\boldsymbol{\theta}}_{21} - \boldsymbol{\theta}_{201})^T (I_{11} - I_{12} I_{22}^{-1} I_{21})(\hat{\boldsymbol{\theta}}_{21} - \boldsymbol{\theta}_{201}) \\ &= (\hat{\boldsymbol{\theta}}_{21} - \boldsymbol{\theta}_{201})^T (I^{11})^{-1} (\hat{\boldsymbol{\theta}}_{21} - \boldsymbol{\theta}_{201}) \end{aligned} \quad (4.98)$$

dimana,

$$\begin{aligned} \mathbf{I}(\hat{\boldsymbol{\theta}}_2)_{(p+1)(k+1) \times (p+1)(k+1)} &= \begin{bmatrix} I_{11(p+1)k \times (p+1)k} & I_{12(p+1)k \times (p+1)} \\ I_{21(p+1)x \times (p+1)k} & I_{22(p+1)x \times (p+1)} \end{bmatrix}, \text{ dan} \\ \mathbf{I}^{-1}(\hat{\boldsymbol{\theta}}_2)_{(p+1)(k+1) \times (p+1)(k+1)} &= \begin{bmatrix} I^{11}_{(p+1)k \times (p+1)k} & I^{12}_{(p+1)k \times (p+1)} \\ I^{21}_{(p+1)x \times (p+1)k} & I^{22}_{(p+1)x \times (p+1)} \end{bmatrix}. \end{aligned}$$

Memperhatikan sifat normalitas untuk MLE pada persamaan (2.63), maka distribusi dari partisi parameter adalah :

$$\begin{bmatrix} \hat{\boldsymbol{\theta}}_{21} - \boldsymbol{\theta}_{21} \\ \hat{\boldsymbol{\theta}}_{22} - \boldsymbol{\theta}_{22} \end{bmatrix} \stackrel{a}{\sim} N \left( \mathbf{0}, \mathbf{I}^{-1}(\boldsymbol{\theta}_2) \equiv \begin{bmatrix} I^{11} & I^{12} \\ I^{21} & I^{22} \end{bmatrix} \right).$$

Sehingga diperoleh :

$$(\hat{\boldsymbol{\theta}}_{21} - \boldsymbol{\theta}_{21}) \stackrel{a}{\sim} N(\mathbf{0}, I^{11})$$

$$(I^{11})^{-1/2} (\hat{\boldsymbol{\theta}}_{21} - \boldsymbol{\theta}_{21}) \stackrel{a}{\sim} N(\mathbf{0}, I_{(p+1)k})$$

$$G_2 = (\hat{\boldsymbol{\theta}}_{21} - \boldsymbol{\theta}_{201})^T (I^{11})^{-1} (\hat{\boldsymbol{\theta}}_{21} - \boldsymbol{\theta}_{201}) \stackrel{a}{\sim} \chi^2_{(p+1)k} \quad \blacksquare$$

Daerah kritis uji serentak diperoleh dengan memperhatikan persamaan (4.95), sebagai berikut :

$$\begin{aligned} \alpha &= P(\Lambda_2 < k_\alpha ; \omega_2) \\ &= P(-2 \ln \Lambda_2 > -2 \ln k_\alpha ; \omega_2) \\ &= P(G_2 > c_2 ; \omega_2), \text{ dengan } c_2 = -2 \ln k_\alpha \\ &= P(G_2 > \chi^2_{(p+1)k, \alpha}) . \end{aligned} \quad (4.99)$$

Berdasarkan persamaan (4.99), daerah kritis uji serentak pada persamaan (4.74) adalah :

$$H_0 \text{ ditolak jika nilai } G_2 > \chi^2_{(p+1)k, \alpha}. \quad (4.100)$$



### Statistik Uji Parsial

Pengujian parsial model MPR dengan kovariansi merupakan fungsi variabel bebas digunakan untuk menguji apakah parameter  $\beta_{cl} (c = 0, 1, 2, \dots, p ; l = 1, 2, \dots, k)$  berpengaruh terhadap model. Formulasi pengujian uji parsial, misal untuk nilai  $c=m$  dapat dituliskan :

$$H_0 : \beta_{ml} = 0, \quad (4.101)$$

$$H_1 : \beta_{ml} \neq 0.$$

Jika  $\hat{\theta}_{204((p+1)(k+1)-1) \times 1} = (\hat{\beta}_{c00}, \hat{\beta}_{c01}, \dots, \hat{\beta}_{m0(l-1)}, \hat{\beta}_{m0(l+1)}, \dots, \hat{\beta}_{c0k} ; c = 0, 1, 2, \dots, p)^T$  dan

$\hat{\theta}_{2((p+1)(k+1) \times 1)} = [\hat{\beta}_0^T \quad \hat{\beta}_1^T \quad \hat{\beta}_2^T \quad \dots \quad \hat{\beta}_p^T]^T$  berturut-turut merupakan estimator MLE dari parameter pada  $H_0$  dan populasi.

Analog dengan pembuktian pada Teorema 4.2, dengan merubah partisi estimator di bawah populasi menjadi :  $\hat{\theta}_2 = [\hat{\theta}_{23} \quad \hat{\theta}_{24}]^T$ ,

dimana  $\hat{\theta}_{23} = [\hat{\beta}_{ml}]$  dan  $\hat{\theta}_{24} = (\hat{\beta}_{c0}, \hat{\beta}_{c1}, \dots, \hat{\beta}_{m(l-1)}, \hat{\beta}_{m(l+1)}, \dots, \hat{\beta}_{ck})^T$ ,

sedangkan estimator MLE dan parameter yang diketahui pada  $H_0$  dibuat partisi menjadi :  $\hat{\theta}_{20} = [\theta_{203} \quad \theta_{204}]^T$ ,

dimana,

$\theta_{203} = [0]$  dan  $\theta_{204} = (\hat{\beta}_{c00}, \hat{\beta}_{c01}, \dots, \hat{\beta}_{m0(l-1)}, \hat{\beta}_{m0(l+1)}, \dots, \hat{\beta}_{c0k})^T$

maka statistik uji LR untuk menguji hipotesis (4.68) dapat dituliskan sebagai berikut :

$$\begin{aligned} G_{22} &\approx (\hat{\theta}_{23} - \theta_{203})^T (I_{11} - I_{12} I_{22}^{-1} I_{21}) (\hat{\theta}_{23} - \theta_{203}) \\ &= (\hat{\theta}_{23} - \theta_{203})^T (I^{11})^{-1} (\hat{\theta}_{23} - \theta_{203}) \end{aligned} \quad (4.102)$$

dimana

$$\begin{aligned} \mathbf{I}(\hat{\theta}_2)_{(p+1)(k+1) \times (p+1)(k+1)} &= \begin{bmatrix} I_{11(1 \times 1)} & I_{12(1 \times (pk+p+k))} \\ I_{21((pk+p+k) \times 1)} & I_{22((pk+p+k) \times (pk+p+k))} \end{bmatrix}, \text{ dan} \\ \mathbf{I}^{-1}(\hat{\theta}_2)_{(p+1)(k+1) \times (p+1)(k+1)} &= \begin{bmatrix} I^{11}_{(1 \times 1)} & I^{12}_{(1 \times (pk+p+k))} \\ I^{21}_{((pk+p+k) \times 1)} & I^{22}_{((pk+p+k) \times (pk+p+k))} \end{bmatrix}. \end{aligned}$$

Berdasarkan sifat normalitas untuk MLE pada persamaan (2.63), dan memperhatikan persamaan (4.69) dengan vektor  $\theta_{23}$  hanya mempunyai satu

elemen, yaitu:  $\beta_{ml}$ , maka statistik uji untuk hipotesis pada persamaan (4.68) dapat dituliskan sebagai :

$$G_{22} = \frac{\hat{\beta}_{ml}^2}{\widehat{\text{var}}[\hat{\beta}_{ml}]} \sim \chi_1^2 \quad (4.103)$$

atau dapat juga menggunakan akar kuadrat dari persamaan (4.103), sehingga diperoleh statistik uji :

$$Z_2 = \frac{\hat{\beta}_{ml}}{\sqrt{\widehat{\text{var}}[\hat{\beta}_{ml}]}} \sim N(0,1) \quad (4.104)$$

dimana  $\widehat{\text{var}}[\hat{\beta}_{ml}]$  diperoleh dari elemen diagonal ke  $[m(k+1)+(l+1)]$  dari matriks  $[\mathbf{I}(\boldsymbol{\theta}_2)]^{-1}$ .

Daerah kritis dari pengujian hipotesis pada persamaan (4.101) adalah :

$$H_0 \text{ ditolak jika nilai } |Z_2| > Z_{\alpha/2}. \quad (4.105)$$

## BAB V

### ***GEOGRAPHICALLY WEIGHTED MULTIVARIATE POISSON REGRESSION***

Pada bab ini dibahas estimasi parameter dan pengujian hipotesis model *geographically weighted multivariate Poisson regression* (GWMPR). Seperti pada model MPR, masing-masing bahasan pada model ini dibagi menjadi dua bagian berdasarkan kovariansinya, yaitu : kovariansi merupakan konstanta dan kovariansi merupakan fungsi variabel bebas. Pembahasan dimulai dengan subbab 5.1 yang menjelaskan model GWMPR, dilanjutkan dengan subbab 5.1.1 dan subbab 5.1.2 berturut-turut membahas estimasi parameter model GWMPR dengan kovariansi merupakan konstanta dan model GWMPR dengan kovariansi merupakan fungsi variabel bebas. Selanjutnya pada subbab 5.2 dikemukakan pengujian hipotesis model GWMPR, dimana untuk subbab 5.2.1 dan subbab 5.2.2 berturut-turut membahas pengujian hipotesis model GWMPR dengan kovariansi merupakan suatu konstanta dan model GWMPR dengan kovariansi merupakan fungsi variabel bebas.

#### **5.1 Model *Geographically Weighted Multivariate Poisson Regression***

GWMPR merupakan pengembangan dari model GWPR yang diperkenalkan oleh Nakaya dkk. (2005) ketika terdapat dua atau lebih variabel respon yang saling berkorelasi. Ide dasar dari GWMPR sama dengan model GWPR, yaitu menggunakan pendekatan spasial titik dengan mempertimbangkan faktor letak geografi yang disajikan sebagai vektor koordinat dua dimensi (lintang dan bujur).

Dalam model GWMPR, variabel respon  $Y_{1i}, Y_{2i}, \dots, Y_{pi}$  diprediksi oleh variabel bebas  $\mathbf{x}_i$  yang masing-masing koefisien regresinya bergantung pada lokasi dimana data tersebut diamati. Untuk membangun model GWMPR, jika diberikan sampel random  $Y_{hi} \sim P(\lambda_h(s_i, \mathbf{u}_i) + \lambda_0(s_i, \mathbf{u}_i)); \quad i = 1, 2, \dots, n$  dan

$h=1,2,\dots,p$ , dengan  $E[Y_{hi}] = \lambda_h(s_i, \mathbf{u}_i) + \lambda_0(s_i, \mathbf{u}_i)$ ,  $s_i$  merupakan *exposure* yang didefinisikan sebagai ukuran populasi lokasi ke- $i$ , dan  $\mathbf{u}_i = (u_{1i} \ u_{2i})$  merupakan vektor koordinat dua dimensi (lintang dan bujur) pada lokasi- $i$ , maka model GWMPR dapat dituliskan sebagai nilai ekspektasi dari  $Y_{hi}$  yang proporsional terhadap ukuran populasi  $s_i$  bergantung pada variabel bebas  $\mathbf{x}_i$  dan lokasi  $\mathbf{u}_i$ .

Jika kovariansi merupakan konstanta, yaitu  $\lambda_0(s_i, \mathbf{u}_i) = \lambda_0(\mathbf{u}_i)$ , maka model GWMPR adalah :

$$E[Y_{hi}] = s_i e^{\mathbf{x}_i^T \boldsymbol{\beta}_h(\mathbf{u}_i)} ; i = 1, 2, \dots, n ; h = 1, 2, \dots, p , \quad (5.1)$$

atau dapat dituliskan :

$$\lambda_h(s_i, \mathbf{u}_i) = s_i e^{\mathbf{x}_i^T \boldsymbol{\beta}_h(\mathbf{u}_i)} - \lambda_0(\mathbf{u}_i) . \quad (5.2)$$

Sementara itu, jika kovariansi merupakan fungsi variabel bebas, yaitu  $\lambda_0(s_i, \mathbf{u}_i) = s_i e^{\mathbf{x}_i^T \boldsymbol{\beta}_0(\mathbf{u}_i)}$ , maka model GWMPR adalah :

$$E[Y_{hi}] = s_i (e^{\mathbf{x}_i^T \boldsymbol{\beta}_h(\mathbf{u}_i)} + e^{\mathbf{x}_i^T \boldsymbol{\beta}_0(\mathbf{u}_i)}) ; i = 1, 2, \dots, n ; h = 1, 2, \dots, p. \quad (5.3)$$

Oleh karena  $E[Y_{hi}] = \lambda_h(s_i, \mathbf{u}_i) + \lambda_0(s_i, \mathbf{u}_i)$ , maka model GWMPR pada persamaan (5.3) dapat dituliskan :

$$\lambda_0(s_i, \mathbf{u}_i) = s_i e^{\mathbf{x}_i^T \boldsymbol{\beta}_0(\mathbf{u}_i)} ; i = 1, 2, \dots, n , \quad (5.4)$$

$$\lambda_h(s_i, \mathbf{u}_i) = s_i e^{\mathbf{x}_i^T \boldsymbol{\beta}_h(\mathbf{u}_i)} ; i = 1, 2, \dots, n ; h = 1, 2, \dots, p, \quad (5.5)$$

dimana

$$\mathbf{x}_i = [1 \ x_{1i} \ x_{2i} \ \dots \ x_{ki}]^T ,$$

$$\boldsymbol{\beta}_0(\mathbf{u}_i) = [\beta_{00}(\mathbf{u}_i) \ \beta_{01}(\mathbf{u}_i) \ \beta_{02}(\mathbf{u}_i) \ \dots \ \beta_{0k}(\mathbf{u}_i)]^T ,$$

$$\boldsymbol{\beta}_h(\mathbf{u}_i) = [\beta_{h0}(\mathbf{u}_i) \ \beta_{h1}(\mathbf{u}_i) \ \beta_{h2}(\mathbf{u}_i) \ \dots \ \beta_{hk}(\mathbf{u}_i)]^T .$$

### 5.1.1 Estimasi Parameter Model GWMPR dengan Kovariansi Merupakan Konstanta

Estimasi parameter model GWMPR dilakukan dengan metode MLE, yaitu dengan memaksimumkan fungsi likelihood. Misalkan diberikan  $n$  sampel random dari variabel random  $(Y_{1i}, Y_{2i}, \dots, Y_{pi}) \sim MP(\lambda_0(s_i, \mathbf{u}_i), \lambda_1(s_i, \mathbf{u}_i), \dots, \lambda_p(s_i, \mathbf{u}_i))$ .

Mempertimbangkan fungsi probabilitas bersama pada persamaan (2.9), maka fungsi likelihood lokasi ke- $i$  dapat ditulis sebagai berikut :

$$L(\lambda_0(s_j, \mathbf{u}_i), \lambda_h(s_j, \mathbf{u}_i); h=1, 2, \dots, p; j=1, 2, \dots, n) = \prod_{j=1}^n \left( e^{-\lambda_0(s_j, \mathbf{u}_i) - \sum_{h=1}^p \lambda_h(s_j, \mathbf{u}_i)} \sum_{v=0}^q \left( \frac{\lambda_0^v(s_j, \mathbf{u}_i)}{v!} \prod_{h=1}^p \frac{\lambda_h^{y_{hj}-v}(s_j, \mathbf{u}_i)}{(y_{hj}-v)!} \right) \right). \quad (5.6)$$

Dengan mensubstitusikan persamaan (5.2) ke dalam persamaan (5.6), diperoleh fungsi likelihood lokasi ke- $i$  sebagai berikut :

$$\begin{aligned} L(\lambda_0(\mathbf{u}_i), \boldsymbol{\beta}_h(\mathbf{u}_i); h=1, 2, \dots, p) &= \prod_{j=1}^n \left( C_j \exp(-\lambda_0(\mathbf{u}_i) - \sum_{h=1}^p (s_j e^{\mathbf{x}_j^T \boldsymbol{\beta}_h(\mathbf{u}_i)} - \lambda_0(\mathbf{u}_i))) \right) \\ &= \prod_{j=1}^n \left( C_j \exp((p-1)\lambda_0(\mathbf{u}_i) - \sum_{h=1}^p s_j e^{\mathbf{x}_j^T \boldsymbol{\beta}_h(\mathbf{u}_i)}) \right), \end{aligned} \quad (5.7)$$

dimana

$$C_j = \sum_{v=0}^q \left( \frac{\lambda_0^v(\mathbf{u}_i)}{v!} \prod_{h=1}^p \frac{(s_j e^{\mathbf{x}_j^T \boldsymbol{\beta}_h(\mathbf{u}_i)} - \lambda_0(\mathbf{u}_i))^{y_{hj}-v}}{(y_{hj}-v)!} \right).$$

Jika  $l(\lambda_0(\mathbf{u}_i), \boldsymbol{\beta}_h(\mathbf{u}_i); h=1, 2, \dots, p) = \ln L(\lambda_0(\mathbf{u}_i), \boldsymbol{\beta}_h(\mathbf{u}_i); h=1, 2, \dots, p)$ , maka

$$l(\lambda_0(\mathbf{u}_i), \boldsymbol{\beta}_h(\mathbf{u}_i); h=1, 2, \dots, p) = \sum_{j=1}^n (p-1)\lambda_0(\mathbf{u}_i) - \sum_{j=1}^n \sum_{h=1}^p s_j e^{\mathbf{x}_j^T \boldsymbol{\beta}_h(\mathbf{u}_i)} + \sum_{j=1}^n \ln C_j. \quad (5.8)$$

Pada model GWMPR, faktor letak geografis memiliki nilai yang berbeda untuk setiap wilayah yang menunjukkan sifat lokal dari model. Oleh karena itu untuk menentukan estimasi parameter pada lokasi ke- $i$  diperlukan informasi dari lokasi yang lain (misalnya lokasi ke- $j$ ) dengan pembobot  $w_{ij}$ , dimana dalam penelitian ini digunakan fungsi pembobot *adaptive kernel Gaussian* yang disajikan pada persamaan (2.52). Untuk memperoleh model GWMPR yang dapat memberikan informasi lokasi dengan baik diperlukan pembobot dengan nilai *bandwidth* yang optimum. Dalam penelitian ini untuk mendapatkan *bandwidth* optimum ditentukan dengan mempertimbangkan nilai *generalized cross validation* (GCV) minimum, yang disajikan pada persamaan (2.54).

Berdasarkan nilai pembobot optimum yang diperoleh, maka fungsi log-likelihood lokasi ke- $i$  dari persamaan (5.8) dapat dituliskan sebagai fungsi log-likelihood terboboti sebagai berikut :

$$\begin{aligned}\mathbb{Q}_1 &= l(\lambda_0(\mathbf{u}_i), \boldsymbol{\beta}_h(\mathbf{u}_i); h=1, 2, \dots, p) w_{ij} \\ &= \sum_{j=1}^n w_{ij} (p-1) \lambda_0(\mathbf{u}_i) - \sum_{j=1}^n \sum_{h=1}^p w_{ij} s_j e^{\mathbf{x}_j^T \boldsymbol{\beta}_h(\mathbf{u}_i)} + \sum_{j=1}^n w_{ij} \ln C_j.\end{aligned}\quad (5.9)$$

Misalkan  $\boldsymbol{\theta}_3(\mathbf{u}_i) = (\lambda_0(\mathbf{u}_i) \quad \boldsymbol{\beta}_1^T(\mathbf{u}_i) \quad \boldsymbol{\beta}_2^T(\mathbf{u}_i) \quad \dots \quad \boldsymbol{\beta}_p^T(\mathbf{u}_i))^T$  merupakan vektor parameter untuk lokasi ke- $i$  dari model GWMPR pada persamaan (5.1), maka estimasi parameter dengan MLE dilakukan dengan memaksimumkan fungsi log-likelihood terboboti pada persamaan (5.9). Menurut Triyanto, Purhadi, Otok, dan Purnami (2015), untuk memperoleh nilai maksimum,  $\mathbb{Q}_1$  diturunkan terhadap  $\boldsymbol{\theta}_3(\mathbf{u}_i)$  disamakan dengan nol, sebagai berikut :

Fungsi log-likelihood terboboti model GWMPR pada persamaan (5.9), jika dimisalkan :

$$C_j = \sum_{v=0}^q \left( C_{v0j} \prod_{h=1}^p C_{v hj} \right); j = 1, 2, \dots, n,$$

dimana

$$C_{v0j} = \frac{\lambda_0^v(\mathbf{u}_i)}{v!} \quad \text{dan} \quad C_{v hj} = \frac{(s_j e^{\mathbf{x}_j^T \boldsymbol{\beta}_h(\mathbf{u}_i)} - \lambda_0(\mathbf{u}_i))^{y_{hj} - v}}{(y_{hj} - v)!},$$

maka hasil turunan parsial dari  $\mathbb{Q}_1$  terhadap  $\lambda_0(\mathbf{u}_i)$  dan  $\boldsymbol{\beta}_h(\mathbf{u}_i)$  ( $h=1, 2, \dots, p$ ) adalah :

$$\frac{\partial \mathbb{Q}_1}{\partial \lambda_0(\mathbf{u}_i)} = \sum_{j=1}^n w_{ij} (p-1) + \sum_{j=1}^n w_{ij} \frac{1}{C_j} \frac{\partial C_j}{\partial \lambda_0}, \quad (5.10)$$

$$\frac{\partial \mathbb{Q}_1}{\partial \boldsymbol{\beta}_h(\mathbf{u}_i)} = - \sum_{j=1}^n w_{ij} s_j e^{\mathbf{x}_j^T \boldsymbol{\beta}_h(\mathbf{u}_i)} \mathbf{x}_j + \sum_{j=1}^n w_{ij} \frac{1}{C_j} \frac{\partial C_j}{\partial \boldsymbol{\beta}_h(\mathbf{u}_i)}. \quad (5.11)$$

Sedangkan turunan  $C_j$  terhadap  $\lambda_0(\mathbf{u}_i)$  dan  $\boldsymbol{\beta}_h(\mathbf{u}_i)$  adalah :

$$\frac{\partial C_j}{\partial \lambda_0(\mathbf{u}_i)} = \sum_{v=0}^q \left( \frac{v \lambda_0^{v-1}(\mathbf{u}_i)}{v!} \prod_{h=1}^p C_{v hj} - \frac{\lambda_0^v(\mathbf{u}_i)}{v!} \sum_{h=1}^p (C_{v hj}^* \prod_{\substack{g=1 \\ g \neq h}}^p C_{v gj}) \right), \quad (5.12)$$

$$\frac{\partial C_j}{\partial \boldsymbol{\beta}_h(\mathbf{u}_i)} = \sum_{v=0}^q \left[ \frac{\lambda_0^v(\mathbf{u}_i)}{v!} C_{v hj}^* s_j e^{\mathbf{x}_j^T \boldsymbol{\beta}_h(\mathbf{u}_i)} \mathbf{x}_j \prod_{\substack{g=1 \\ g \neq h}}^p C_{v gj} \right], \quad (5.13)$$

dimana

$$C_{v hj}^* = \frac{(y_{hj} - v)(s_j e^{\mathbf{x}_j^T \boldsymbol{\beta}_h(\mathbf{u}_i)} - \lambda_0(\mathbf{u}_i))^{y_{hj} - v - 1}}{(y_{hj} - v)!}.$$

Hasil turunan parsial fungsi log-likelihood terboboti terhadap masing-masing parameternya pada persamaan (5.10) s.d. (5.13), dan disamakan dengan nol merupakan sistem persamaan tidak *close form*, sehingga MLE tidak dapat menghasilkan penyelesaian analitik. Oleh karena itu untuk mendapatkan estimator dengan metode MLE diperlukan proses iterasi secara numerik. Metode iterasi yang digunakan dalam penelitian ini adalah algoritma *Newton-Raphson* dengan formula sebagai berikut :

$$\hat{\boldsymbol{\theta}}_{3(t+1)}(\mathbf{u}_i) = \hat{\boldsymbol{\theta}}_{3(t)}(\mathbf{u}_i) - \mathbf{H}^{-1}(\hat{\boldsymbol{\theta}}_{3(t)}(\mathbf{u}_i))\mathbf{g}(\hat{\boldsymbol{\theta}}_{3(t)}(\mathbf{u}_i)), \quad (5.14)$$

dimana

$\hat{\boldsymbol{\theta}}_{3(t)}(\mathbf{u}_i)$  adalah estimator parameter lokasi ke- $i$  pada iterasi ke- $t$ ,

$$\mathbf{g}^T(\boldsymbol{\theta}_{3(t)}(\mathbf{u}_i)) = \left( \frac{\partial Q_1}{\partial \lambda_0(\mathbf{u}_i)} \quad \frac{\partial Q_1}{\partial \boldsymbol{\beta}_1^T(\mathbf{u}_i)} \quad \cdots \quad \frac{\partial Q_1}{\partial \boldsymbol{\beta}_p^T(\mathbf{u}_i)} \right)_{\boldsymbol{\theta}_3(\mathbf{u}_i) = \boldsymbol{\theta}_{3(t)}(\mathbf{u}_i)} \quad \text{adalah vektor gradien}$$

lokasi ke- $i$  pada iterasi ke- $t$ , dengan elemen vektor sebagaimana tertulis pada persamaan (5.10) s.d. (5.13), dan

$$\mathbf{H}(\boldsymbol{\theta}_{3(t)}(\mathbf{u}_i)) = \begin{pmatrix} \frac{\partial^2 Q_1}{\partial \lambda_0^2(\mathbf{u}_i)} & \frac{\partial^2 Q_1}{\partial \lambda_0(\mathbf{u}_i) \partial \boldsymbol{\beta}_1^T(\mathbf{u}_i)} & \cdots & \frac{\partial^2 Q_1}{\partial \lambda_0(\mathbf{u}_i) \partial \boldsymbol{\beta}_p^T(\mathbf{u}_i)} \\ \frac{\partial^2 Q_1}{\partial \lambda_0(\mathbf{u}_i) \partial \boldsymbol{\beta}_1(\mathbf{u}_i)} & \frac{\partial^2 Q_1}{\partial \boldsymbol{\beta}_1(\mathbf{u}_i) \partial \boldsymbol{\beta}_1^T(\mathbf{u}_i)} & \cdots & \frac{\partial^2 Q_1}{\partial \boldsymbol{\beta}_1(\mathbf{u}_i) \partial \boldsymbol{\beta}_p^T(\mathbf{u}_i)} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial^2 Q_1}{\partial \lambda_0(\mathbf{u}_i) \partial \boldsymbol{\beta}_p(\mathbf{u}_i)} & \frac{\partial^2 Q_1}{\partial \boldsymbol{\beta}_1(\mathbf{u}_i) \partial \boldsymbol{\beta}_p^T(\mathbf{u}_i)} & \cdots & \frac{\partial^2 Q_1}{\partial \boldsymbol{\beta}_p(\mathbf{u}_i) \partial \boldsymbol{\beta}_p^T(\mathbf{u}_i)} \end{pmatrix}_{\boldsymbol{\theta}_3(\mathbf{u}_i) = \boldsymbol{\theta}_{3(t)}(\mathbf{u}_i)}$$

adalah matriks Hessian lokasi ke- $i$  pada iterasi ke- $t$ , dimana elemen matriks merupakan turunan parsial kedua dari  $Q_1$  terhadap kombinasi masing-masing parameternya, sebagai berikut :

$$\frac{\partial^2 Q_1}{\partial \lambda_0^2(\mathbf{u}_i)} = \sum_{j=1}^n w_{ij} \left[ \left( \frac{1}{C_j} \frac{\partial^2 C_j}{\partial \lambda_0^2(\mathbf{u}_i)} \right) - \frac{1}{C_j^2} \left( \frac{\partial C_j}{\partial \lambda_0(\mathbf{u}_i)} \right)^2 \right], \quad (5.15)$$

$$\frac{\partial^2 \mathbb{Q}_1}{\partial \boldsymbol{\beta}_h(\mathbf{u}_i) \partial \boldsymbol{\beta}_h^T(\mathbf{u}_i)} = - \sum_{j=1}^n w_{ij} s_j e^{\mathbf{x}_j^T \boldsymbol{\beta}_h(\mathbf{u}_i)} \mathbf{x}_j \mathbf{x}_j^T + \sum_{j=1}^n w_{ij} \left[ \left( \frac{1}{C_j} \frac{\partial^2 C_j}{\partial \boldsymbol{\beta}_h(\mathbf{u}_i) \partial \boldsymbol{\beta}_h^T(\mathbf{u}_i)} \right) - \frac{1}{C_j^2} \frac{\partial C_j}{\partial \boldsymbol{\beta}_h(\mathbf{u}_i)} \frac{\partial C_j}{\partial \boldsymbol{\beta}_h^T(\mathbf{u}_i)} \right], \quad (5.16)$$

$$\frac{\partial^2 \mathbb{Q}_1}{\partial \lambda_0(\mathbf{u}_i) \partial \boldsymbol{\beta}_h(\mathbf{u}_i)} = \sum_{j=1}^n w_{ij} \left[ \left( \frac{1}{C_j} \frac{\partial^2 C_j}{\partial \lambda_0(\mathbf{u}_i) \partial \boldsymbol{\beta}_h(\mathbf{u}_i)} \right) - \left( \frac{1}{C_j^2} \frac{\partial C_j}{\partial \lambda_0(\mathbf{u}_i)} \frac{\partial C_j}{\partial \boldsymbol{\beta}_h(\mathbf{u}_i)} \right) \right], \quad (5.17)$$

untuk  $g, h = 1, 2, \dots, p$  ;  $g \neq h$  ,

$$\frac{\partial^2 \mathbb{Q}_1}{\partial \boldsymbol{\beta}_h(\mathbf{u}_i) \partial \boldsymbol{\beta}_g^T(\mathbf{u}_i)} = \sum_{j=1}^n w_{ij} \left[ \frac{1}{C_j} \frac{\partial^2 C_j}{\partial \boldsymbol{\beta}_h(\mathbf{u}_i) \partial \boldsymbol{\beta}_g^T(\mathbf{u}_i)} - \frac{1}{C_j^2} \frac{\partial C_j}{\partial \boldsymbol{\beta}_h(\mathbf{u}_i)} \frac{\partial C_j}{\partial \boldsymbol{\beta}_g^T(\mathbf{u}_i)} \right]. \quad (5.18)$$

Turunan parsial kedua dari  $C_j$  terhadap masing-masing kombinasi  $\lambda_0(\mathbf{u}_i)$  dan  $\boldsymbol{\beta}_h(\mathbf{u}_i)$  sebagai berikut :

$$\frac{\partial^2 C_j}{\partial \lambda_0^2(\mathbf{u}_i)} = \sum_{v=0}^q \left[ \frac{v(v-1) \lambda_0^{v-2}(\mathbf{u}_i)}{v!} \prod_{h=1}^p C_{vhj} - \frac{2v \lambda_0^{v-1}(\mathbf{u}_i)}{v!} \sum_{h=1}^p (C_{vhj}^* \prod_{\substack{g=1 \\ g \neq h}}^p C_{vgj}) + \frac{\lambda_0^v(\mathbf{u}_i)}{v!} \left( \sum_{h=1}^p (C_{vhj}^{**} \prod_{\substack{g=1 \\ g \neq h}}^p C_{vgj}) + \sum_{h=1}^p \sum_{g=1}^p C_{vhj}^* (C_{vgj}^* \prod_{\substack{t=1 \\ t \neq h, g}}^p C_{vtj}) \right) \right], \quad (5.19)$$

$$\frac{\partial^2 C_j}{\partial \boldsymbol{\beta}_h(\mathbf{u}_i) \partial \boldsymbol{\beta}_h^T(\mathbf{u}_i)} = \sum_{v=0}^q \left[ \frac{\lambda_0^v(\mathbf{u}_i)}{v!} \left( C_{vhj}^{**} s_j^2 e^{2 \mathbf{x}_j^T \boldsymbol{\beta}_h(\mathbf{u}_i)} \mathbf{x}_j \mathbf{x}_j^T + C_{vhj}^* s_j e^{\mathbf{x}_j^T \boldsymbol{\beta}_h(\mathbf{u}_i)} \mathbf{x}_j \mathbf{x}_j^T \right) \prod_{\substack{g=1 \\ g \neq h}}^p C_{vgj} \right], \quad (5.20)$$

$$\frac{\partial^2 C_j}{\partial \lambda_0(\mathbf{u}_i) \partial \boldsymbol{\beta}_h(\mathbf{u}_i)} = \sum_{v=0}^q \left[ \frac{v \lambda_0^{v-1}(\mathbf{u}_i)}{v!} C_{vhj}^* s_j e^{\mathbf{x}_j^T \boldsymbol{\beta}_h(\mathbf{u}_i)} \mathbf{x}_j \prod_{\substack{g=1 \\ g \neq h}}^p C_{vgj} - \frac{\lambda_0^v(\mathbf{u}_i)}{v!} C_{vhj}^{**} s_j e^{\mathbf{x}_j^T \boldsymbol{\beta}_h(\mathbf{u}_i)} \mathbf{x}_j \prod_{\substack{g=1 \\ g \neq h}}^p C_{vgj} - \frac{\lambda_0^v(\mathbf{u}_i)}{v!} C_{vhj}^* s_j e^{\mathbf{x}_j^T \boldsymbol{\beta}_h(\mathbf{u}_i)} \mathbf{x}_j \sum_{\substack{g=1 \\ g \neq h}}^p (C_{vgj}^* \prod_{\substack{t=1 \\ t \neq g, h}}^p C_{vtj}) \right], \quad (5.21)$$

$$\frac{\partial^2 C_j}{\partial \boldsymbol{\beta}_h(\mathbf{u}_i) \partial \boldsymbol{\beta}_g^T(\mathbf{u}_i)} = \sum_{v=0}^q \left( \frac{\lambda_0^v(\mathbf{u}_i)}{v!} \mathbf{x}_j \mathbf{x}_j^T C_{vhj}^* s_j e^{\mathbf{x}_j^T \boldsymbol{\beta}_h(\mathbf{u}_i)} C_{vgj}^* s_j e^{\mathbf{x}_j^T \boldsymbol{\beta}_g(\mathbf{u}_i)} \prod_{\substack{t=1 \\ t \neq h, g}}^p C_{vtj} \right), \quad (5.22)$$

dimana

$$C_{vhj}^{**} = \frac{(y_{hj} - v)(y_{hj} - v - 1)(s_j e^{\mathbf{x}_j^T \boldsymbol{\beta}_h(\mathbf{u}_i)} - \lambda_0(\mathbf{u}_i))^{(y_{hj} - v - 2)}}{(y_{hj} - v)!}.$$



Proses iterasi *Newton-Raphson* pada persamaan (5.14), dimulai dengan memasukkan nilai awal estimator parameter, yaitu :

$$\hat{\boldsymbol{\theta}}_{3(0)}(\mathbf{u}_i) = (\hat{\lambda}_{0(0)}(\mathbf{u}_i) \quad \hat{\boldsymbol{\beta}}_{1(0)}^T(\mathbf{u}_i) \quad \hat{\boldsymbol{\beta}}_{2(0)}^T(\mathbf{u}_i) \quad \dots \quad \hat{\boldsymbol{\beta}}_{p(0)}^T(\mathbf{u}_i))^T$$

dimana

$$\hat{\lambda}_{0(0)} = \widehat{\text{cov}}[\mathbf{y}_h^*, \mathbf{y}_l^*] ; g, h = 1, 2, \dots, p ; g \neq h \quad \text{dan} \quad \hat{\boldsymbol{\beta}}_{h(0)} = (\mathbf{X}^T \mathbf{X})^{-1} \mathbf{X}^T \mathbf{y}_h^*,$$

dengan  $\mathbf{y}_h^* = [y_{h1}^* \quad y_{h2}^* \quad \dots \quad y_{hn}^*]^T$  adalah vektor variabel respon baru dengan elemen sebagai berikut :

$$y_{hi}^* = \begin{cases} \ln(y_{hi}/s_i) & ; y_{hi} = 1, 2, 3, \dots \\ 0 & ; y_{hi} = 0 \end{cases},$$

dan proses iterasi dihentikan jika  $\|\hat{\boldsymbol{\theta}}_{3(t+1)}(\mathbf{u}_i) - \hat{\boldsymbol{\theta}}_{3(t)}(\mathbf{u}_i)\| \leq \varepsilon$ , dengan  $\varepsilon$  bilangan riil positif yang sangat kecil.

### 5.1.2 Estimasi Parameter Model GWMPR dengan Kovariansi Merupakan Fungsi Variabel Bebas

Estimasi parameter untuk model ini dilakukan seperti pada model GWMPR dengan kovariansi merupakan konstanta dengan menggantikan  $\lambda_0(s_i, \mathbf{u}_i)$  sebagai fungsi variabel bebas, yaitu :  $s_i e^{\mathbf{x}_i^T \boldsymbol{\beta}_0(\mathbf{u}_i)}$ .

Misalkan  $\boldsymbol{\theta}_4(\mathbf{u}_i) = (\boldsymbol{\beta}_0^T(\mathbf{u}_i) \quad \boldsymbol{\beta}_1^T(\mathbf{u}_i) \quad \boldsymbol{\beta}_2^T(\mathbf{u}_i) \quad \dots \quad \boldsymbol{\beta}_p^T(\mathbf{u}_i))^T$  merupakan vektor parameter untuk lokasi ke- $i$  model GWMPR dengan kovariansi merupakan fungsi variabel bebas, maka berdasarkan model pada persamaan (5.4) dan (5.5), fungsi likelihood lokasi ke- $i$  pada persamaan (5.7) dapat ditulis sebagai :

$$L(\boldsymbol{\theta}_4(\mathbf{u}_i)) = \prod_{j=1}^n \left( D_j \exp(-s_j e^{\mathbf{x}_j^T \boldsymbol{\beta}_0(\mathbf{u}_i)}) - \sum_{h=1}^p s_j e^{\mathbf{x}_j^T \boldsymbol{\beta}_h(\mathbf{u}_i)} \right), \quad (5.23)$$

$$\text{dimana } D_j = \sum_{v=0}^q \frac{(s_j e^{\mathbf{x}_j^T \boldsymbol{\beta}_0(\mathbf{u}_i)})^v}{v!} \prod_{h=1}^p \frac{(s_j e^{\mathbf{x}_j^T \boldsymbol{\beta}_h(\mathbf{u}_i)})^{y_{hj}}}{(y_{hj} - v)!}.$$

Jika  $l(\boldsymbol{\theta}_4(\mathbf{u}_i)) = \ln L(\boldsymbol{\theta}_4(\mathbf{u}_i))$ , maka

$$l(\boldsymbol{\theta}_4(\mathbf{u}_i)) = \sum_{j=1}^n \ln D_j - \sum_{j=1}^n s_j e^{\mathbf{x}_j^T \boldsymbol{\beta}_0(\mathbf{u}_i)} - \sum_{j=1}^n \sum_{h=1}^p s_j e^{\mathbf{x}_j^T \boldsymbol{\beta}_h(\mathbf{u}_i)}. \quad (5.24)$$

Untuk menentukan estimasi parameter model GWMPR pada lokasi ke- $i$  diperlukan informasi dari lokasi yang lain (misalnya lokasi ke- $j$ ) dengan pembobot  $w_{ij}$ . Sebagaimana pada model GWMPR dengan kovariansi merupakan konstanta, pada model ini digunakan fungsi pembobot *adaptive kernel Gaussian* yang disajikan pada persamaan (2.52) dan *bandwidth* optimum ditentukan dengan mempertimbangkan nilai *generalized cross-validation* (GCV) minimum, yang disajikan pada persamaan (2.54).

Berdasarkan nilai pembobot optimum ( $w_{ij}$ ) yang diperoleh, maka fungsi log-likelihood dari persamaan (5.24) untuk lokasi ke- $i$  dapat dituliskan sebagai fungsi log-likelihood terboboti sebagai berikut :

$$\begin{aligned}\mathbb{Q}_2 &= l(\boldsymbol{\beta}_0(\mathbf{u}_i), \boldsymbol{\beta}_h(\mathbf{u}_i)) \cdot w_{ij} \\ &= \sum_{j=1}^n w_{ij} \ln D_j - \sum_{j=1}^n w_{ij} s_j e^{\mathbf{x}_j^T \boldsymbol{\beta}_0(\mathbf{u}_i)} - \sum_{j=1}^n \sum_{h=1}^p w_{ij} s_j e^{\mathbf{x}_j^T \boldsymbol{\beta}_h(\mathbf{u}_i)}.\end{aligned}\quad (5.25)$$

Misalkan  $\boldsymbol{\theta}_4(\mathbf{u}_i) = (\boldsymbol{\beta}_0^T(\mathbf{u}_i) \ \boldsymbol{\beta}_1^T(\mathbf{u}_i) \ \boldsymbol{\beta}_2^T(\mathbf{u}_i) \ \dots \ \boldsymbol{\beta}_p^T(\mathbf{u}_i))^T$  merupakan vektor parameter untuk lokasi ke- $i$  model GWMPR pada persamaan (5.3), maka estimasi parameter dengan MLE dilakukan dengan memaksimumkan fungsi log-likelihood terboboti pada persamaan (5.25). Untuk memperoleh nilai maksimum,  $\mathbb{Q}_2$  diturunkan terhadap  $\boldsymbol{\theta}_4(\mathbf{u}_i)$  dan disamakan dengan nol, sebagai berikut :

Fungsi log-likelihood terboboti model GWMPR pada persamaan (5.25), jika dimisalkan :

$$D_j = \sum_{v=0}^q \left( D_{v0j} \prod_{h=1}^p D_{vhj} \right); j = 1, 2, \dots, n,$$

dimana

$$D_{v0j} = \frac{(s_j e^{\mathbf{x}_j^T \boldsymbol{\beta}_0(\mathbf{u}_i)})^v}{v!} \text{ dan } D_{vhj} = \frac{(s_j e^{\mathbf{x}_j^T \boldsymbol{\beta}_h(\mathbf{u}_i)})^{y_{hj}-v}}{(y_{hj}-v)!},$$

maka hasil turunan pertama dari  $\mathbb{Q}_2$  terhadap  $\boldsymbol{\beta}_0(\mathbf{u}_i)$  dan  $\boldsymbol{\beta}_h(\mathbf{u}_i)$  ( $h=1,2,\dots,p$ ) adalah :

$$\frac{\partial \mathbb{Q}_2}{\partial \boldsymbol{\beta}_0(\mathbf{u}_i)} = \sum_{j=1}^n w_{ij} \frac{1}{D_j} \frac{\partial D_j}{\partial \boldsymbol{\beta}_0} - \sum_{j=1}^n w_{ij} s_j e^{\mathbf{x}_j^T \boldsymbol{\beta}_0(\mathbf{u}_i)} \mathbf{x}_j, \quad (5.26)$$

$$\frac{\partial Q_2}{\partial \beta_h(\mathbf{u}_i)} = \sum_{j=1}^n w_{ij} \frac{1}{D_j} \frac{\partial D_j}{\partial \beta_h} - \sum_{j=1}^n w_{ij} s_j e^{\mathbf{x}_j^T \beta_h(\mathbf{u}_i)} \mathbf{x}_j. \quad (5.27)$$

Sedangkan turunan  $D_j$  terhadap  $\beta_0(\mathbf{u}_i)$  dan  $\beta_h(\mathbf{u}_i)$  adalah

$$\frac{\partial D_j}{\partial \beta_0(\mathbf{u}_i)} = \sum_{v=0}^q \left( \frac{v(s_j e^{\mathbf{x}_j^T \beta_0(\mathbf{u}_i)})^v}{v!} \mathbf{x}_j \prod_{h=1}^p D_{vhj} \right), \quad (5.28)$$

$$\frac{\partial D_j}{\partial \beta_h(\mathbf{u}_i)} = \sum_{v=0}^q \left( \frac{(y_{hi} - v)(s_j e^{\mathbf{x}_j^T \beta_h(\mathbf{u}_i)})^{y_{hi}-v}}{(y_{hi} - v)!} \mathbf{x}_j D_{v0j} \prod_{\substack{g=1 \\ g \neq h}}^p D_{vgj} \right). \quad (5.29)$$

Sebagaimana pada model GWMPR dengan kovariansi merupakan konstanta, model ini mempunyai turunan parsial dari fungsi log-likelihood terboboti terhadap masing-masing parameternya pada persamaan (5.26) s.d. (5.29) dan disamakan dengan nol juga merupakan sistem persamaan tidak *close form*, sehingga MLE tidak dapat menghasilkan penyelesaian analitik. Oleh karena itu untuk mendapatkan estimator dengan metode MLE diperlukan proses iterasi secara numerik, dengan algoritma *Newton-Raphson* dengan formula sebagai berikut :

$$\hat{\theta}_{4(t+1)}(\mathbf{u}_i) = \hat{\theta}_{4(t)}(\mathbf{u}_i) - \mathbf{H}^{-1}(\hat{\theta}_{4(t)}(\mathbf{u}_i)) \mathbf{g}(\hat{\theta}_{4(t)}(\mathbf{u}_i)), \quad (5.30)$$

dimana

$\hat{\theta}_{4(t)}(\mathbf{u}_i)$  adalah estimator parameter lokasi ke- $i$  pada iterasi ke- $t$ ,

$$\mathbf{g}^T(\theta_{4(t)}(\mathbf{u}_i)) = \left( \frac{\partial Q_2}{\partial \lambda_0(\mathbf{u}_i)} \quad \frac{\partial Q_2}{\partial \beta_1^T(\mathbf{u}_i)} \quad \dots \quad \frac{\partial Q_2}{\partial \beta_p^T(\mathbf{u}_i)} \right)_{\theta_4(\mathbf{u}_i) = \theta_{4(t)}(\mathbf{u}_i)} \quad \text{adalah vektor gradien}$$

lokasi ke- $i$  pada iterasi ke- $t$ , dengan elemen vektor sebagaimana tertulis pada persamaan (5.26) s.d. (5.29), dan

$$\mathbf{H}(\theta_{4(t)}(\mathbf{u}_i)) = \begin{pmatrix} \frac{\partial^2 Q_2}{\partial \lambda_0^2(\mathbf{u}_i)} & \frac{\partial^2 Q_2}{\partial \lambda_0(\mathbf{u}_i) \partial \beta_1^T(\mathbf{u}_i)} & \dots & \frac{\partial^2 Q_2}{\partial \lambda_0(\mathbf{u}_i) \partial \beta_p^T(\mathbf{u}_i)} \\ \frac{\partial^2 Q_2}{\partial \lambda_0(\mathbf{u}_i) \partial \beta_1(\mathbf{u}_i)} & \frac{\partial^2 Q_2}{\partial \beta_1(\mathbf{u}_i) \partial \beta_1^T(\mathbf{u}_i)} & \dots & \frac{\partial^2 Q_2}{\partial \beta_1(\mathbf{u}_i) \partial \beta_p^T(\mathbf{u}_i)} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial^2 Q_2}{\partial \lambda_0(\mathbf{u}_i) \partial \beta_p(\mathbf{u}_i)} & \frac{\partial^2 Q_2}{\partial \beta_1(\mathbf{u}_i) \partial \beta_p^T(\mathbf{u}_i)} & \dots & \frac{\partial^2 Q_2}{\partial \beta_p(\mathbf{u}_i) \partial \beta_p^T(\mathbf{u}_i)} \end{pmatrix}_{\theta_4(\mathbf{u}_i) = \theta_{4(t)}(\mathbf{u}_i)}$$

adalah matriks Hessian lokasi ke- $i$  pada iterasi ke- $t$ , dimana elemen matriks merupakan turunan parsial kedua dari  $\mathbb{Q}_2$  terhadap kombinasi masing-masing parameternya, sebagai berikut :

$$\frac{\partial^2 \mathbb{Q}_2}{\partial \beta_0(\mathbf{u}_i) \partial \beta_0^T(\mathbf{u}_i)} = \sum_{j=1}^n w_{ij} \left[ \frac{1}{D_j} \frac{\partial^2 D_j}{\partial \beta_0(\mathbf{u}_i) \partial \beta_0^T(\mathbf{u}_i)} - \frac{1}{D_j^2} \frac{\partial D_j}{\partial \beta_0(\mathbf{u}_i)} \frac{\partial D_j}{\partial \beta_0^T(\mathbf{u}_i)} - s_j e^{\mathbf{x}_j^T \beta_0(\mathbf{u}_i)} \mathbf{x}_j \mathbf{x}_j^T \right], \quad (5.31)$$

$$\frac{\partial^2 \mathbb{Q}_2}{\partial \beta_h(\mathbf{u}_i) \partial \beta_h^T(\mathbf{u}_i)} = \sum_{j=1}^n w_{ij} \left[ \frac{1}{D_j} \frac{\partial^2 D_j}{\partial \beta_h(\mathbf{u}_i) \partial \beta_h^T(\mathbf{u}_i)} - \frac{1}{D_j^2} \frac{\partial D_j}{\partial \beta_h(\mathbf{u}_i)} \frac{\partial D_j}{\partial \beta_h^T(\mathbf{u}_i)} - s_j e^{\mathbf{x}_j^T \beta_h(\mathbf{u}_i)} \mathbf{x}_j \mathbf{x}_j^T \right], \quad (5.32)$$

$$\frac{\partial^2 \mathbb{Q}_2}{\partial \beta_0(\mathbf{u}_i) \partial \beta_h^T(\mathbf{u}_i)} = \sum_{j=1}^n w_{ij} \left[ \frac{1}{D_j} \frac{\partial^2 D_j}{\partial \beta_0(\mathbf{u}_i) \partial \beta_h^T(\mathbf{u}_i)} - \frac{1}{D_j^2} \frac{\partial D_j}{\partial \beta_0(\mathbf{u}_i)} \frac{\partial D_j}{\partial \beta_h^T(\mathbf{u}_i)} \right], \quad (5.33)$$

untuk  $g, h = 1, 2, \dots, p$  ;  $g \neq h$  ,

$$\frac{\partial^2 \mathbb{Q}_2}{\partial \beta_h(\mathbf{u}_i) \partial \beta_g^T(\mathbf{u}_i)} = \sum_{j=1}^n w_{ij} \left[ \frac{1}{D_j} \frac{\partial^2 D_j}{\partial \beta_h(\mathbf{u}_i) \partial \beta_g^T(\mathbf{u}_i)} - \frac{1}{D_j^2} \frac{\partial D_j}{\partial \beta_h(\mathbf{u}_i)} \frac{\partial D_j}{\partial \beta_g^T(\mathbf{u}_i)} \right]. \quad (5.34)$$

Turunan parsial kedua dari  $D_j$  terhadap masing-masing kombinasi  $\beta_0(\mathbf{u}_i)$  dan  $\beta_h(\mathbf{u}_i)$  sebagai berikut :

$$\frac{\partial^2 D_j}{\partial \beta_0(\mathbf{u}_i) \partial \beta_0^T(\mathbf{u}_i)} = \sum_{v=0}^q \left[ v^2 \frac{(s_j e^{\mathbf{x}_j^T \beta_0(\mathbf{u}_i)})^v}{v!} \mathbf{x}_j \mathbf{x}_j^T \prod_{h=1}^p D_{vhj} \right], \quad (5.35)$$

$$\frac{\partial^2 D_j}{\partial \beta_h(\mathbf{u}_i) \partial \beta_h^T(\mathbf{u}_i)} = \sum_{v=0}^q \left( (y_{hi} - v)^2 \frac{(s_j e^{\mathbf{x}_j^T \beta_h(\mathbf{u}_i)})^{y_{hi}-v}}{(y_{hi} - v)!} \mathbf{x}_j \mathbf{x}_j^T D_{v0j} \prod_{\substack{g=1 \\ g \neq h}}^p D_{vgj} \right), \quad (5.36)$$

$$\frac{\partial^2 D_j}{\partial \beta_0(\mathbf{u}_i) \partial \beta_h^T(\mathbf{u}_i)} = \sum_{v=0}^q \left( \frac{v(s_j e^{\mathbf{x}_j^T \beta_0(\mathbf{u}_i)})^v}{v!} \frac{(y_{hi} - v)(s_j e^{\mathbf{x}_j^T \beta_h(\mathbf{u}_i)})^{y_{hi}-v}}{(y_{hi} - v)!} \mathbf{x}_j \mathbf{x}_j^T \prod_{\substack{g=1 \\ g \neq h}}^p D_{vgj} \right), \quad (5.37)$$

$$\frac{\partial^2 D_j}{\partial \beta_h(\mathbf{u}_i) \partial \beta_g^T(\mathbf{u}_i)} = \sum_{v=0}^q \left( \frac{(y_{hi} - v)(s_j e^{\mathbf{x}_j^T \beta_h(\mathbf{u}_i)})^{y_{hi}-v}}{(y_{hi} - v)!} \frac{(y_{gi} - v)(s_j e^{\mathbf{x}_j^T \beta_g(\mathbf{u}_i)})^{y_{gi}-v}}{(y_{gi} - v)!} \mathbf{x}_j \mathbf{x}_j^T D_{v0j} \prod_{\substack{t=1 \\ t \neq g, h}}^p D_{vtj} \right). \quad (5.38)$$

Proses iterasi *Newton-Raphson* pada persamaan (5.30), dimulai dengan memasukkan nilai awal estimator parameter, yaitu :

$$\hat{\theta}_{4(0)}(\mathbf{u}_i) = (\hat{\beta}_{0(0)}^T(\mathbf{u}_i) \quad \hat{\beta}_{1(0)}^T(\mathbf{u}_i) \quad \hat{\beta}_{2(0)}^T(\mathbf{u}_i) \quad \dots \quad \hat{\beta}_{p(0)}^T(\mathbf{u}_i))^T,$$

dimana

$$\hat{\beta}_{0(0)} = (\mathbf{X}^T \mathbf{X})^{-1} \mathbf{X}^T \mathbf{y}_0^* \quad \text{dan} \quad \hat{\beta}_{h(0)} = (\mathbf{X}^T \mathbf{X})^{-1} \mathbf{X}^T \mathbf{y}_h^*,$$

dengan,  $\mathbf{y}_0^* = \hat{E}[\mathbf{y}_0 | \mathbf{y}_h, \boldsymbol{\theta}]$  dan

$\mathbf{y}_h^* = [y_{h1}^* \quad y_{h2}^* \quad \dots \quad y_{hn}^*]^T$  adalah vektor variabel respon baru dengan elemen sebagai berikut :

$$y_{hi}^* = \begin{cases} \ln(y_{hi}/s_i) & ; y_{hi} = 1, 2, 3, \dots \\ 0 & ; y_{hi} = 0 \end{cases},$$

dan proses iterasi dihentikan jika  $\|\hat{\boldsymbol{\theta}}_{4(t+1)}(\mathbf{u}_i) - \hat{\boldsymbol{\theta}}_{4(t)}(\mathbf{u}_i)\| \leq \varepsilon$ , dengan  $\varepsilon$  bilangan riil positif yang sangat kecil.

## 5.2 Pengujian Hipotesis Model GWMPR

Pengujian hipotesis model GWMPR terdiri dari uji kesamaan model GWMPR dan MPR, uji parameter secara serentak, dan uji parameter secara parsial. Ketiga pengujian tersebut dilakukan untuk model GWMPR dengan kovariansi merupakan konstanta maupun kovariansi merupakan fungsi variabel bebas.

### 5.2.1 Pengujian Hipotesis Model GWMPR dengan Kovariansi Merupakan Konstanta

Pada bagian ini akan dibahas tentang penentuan statistik uji beserta distribusinya untuk uji kesamaan model GWMPR dan MPR, uji parameter secara serentak, dan uji parameter secara parsial dari model GWMPR dengan kovariansi merupakan konstanta.

#### Uji Kesamaan Model GWMPR dan MPR

Pengujian ini digunakan untuk mengetahui apakah ada perbedaan model GWMPR dan MPR, yang diformulasikan sebagai berikut :

$$\begin{aligned} H_0 : \beta_{hl}(\mathbf{u}_i) &= \beta_{hl} \quad ; h = 1, 2, \dots, p \quad ; l = 1, 2, \dots, k \quad ; i = 1, 2, \dots, n \\ H_1 : &\text{paling sedikit ada satu } \beta_{hl}(\mathbf{u}_i) \neq \beta_{hl} \end{aligned} \quad (5.39)$$

Formula pengujian hipotesis pada persamaan (5.39) merupakan model *non-nested*, sehingga dalam penelitian ini digunakan statistik uji dari *Young's test* sebagai berikut :

$$G_{13} = \frac{\sqrt{n} \left( \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n m_i \right)}{\sqrt{\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n (m_i - \bar{m})^2}} \quad (5.40)$$

dimana

$$m_i = (p-1)(\hat{\lambda}_0 - \hat{\lambda}_0(\mathbf{u}_i)) - \sum_{h=1}^p s_i (e^{\mathbf{x}_i^T \hat{\boldsymbol{\beta}}_h} - e^{\mathbf{x}_i^T \hat{\boldsymbol{\beta}}_h(\mathbf{u}_i)}) + (\ln \hat{A}_i - \ln \hat{C}_i).$$

$$\hat{A}_i = \sum_{v=0}^q \left( \frac{\hat{\lambda}_0^v}{v!} \prod_{h=1}^p \frac{(s_i e^{\mathbf{x}_i^T \hat{\boldsymbol{\beta}}_h} - \hat{\lambda}_0)^{y_{hi}-v}}{(y_{hi}-v)!} \right)$$

$$\hat{C}_i = \sum_{v=0}^q \left( \frac{\hat{\lambda}_0^v(\mathbf{u}_i)}{v!} \prod_{h=1}^p \frac{(s_i e^{\mathbf{x}_i^T \hat{\boldsymbol{\beta}}_h(\mathbf{u}_i)} - \hat{\lambda}_0(\mathbf{u}_i))^{y_{hi}-v}}{(y_{hi}-v)!} \right)$$

$\hat{\lambda}_0$  dan  $\hat{\boldsymbol{\beta}}_h$  merupakan estimator untuk  $\lambda_0$  dan  $\boldsymbol{\beta}_h$  yang diperoleh dari algoritma *Newton-Raphson* pada persamaan (4.13), sedangkan  $\hat{\lambda}_0(\mathbf{u}_i)$  dan  $\hat{\boldsymbol{\beta}}_h(\mathbf{u}_i)$  merupakan estimator untuk parameter  $\lambda_0(\mathbf{u}_i)$  dan  $\boldsymbol{\beta}_h(\mathbf{u}_i)$  yang diperoleh dari algoritma *Newton-Raphson* pada persamaan (5.14).

Berdasarkan teorema limit sentral, statistik uji kesamaan model GWMPR dan MPR pada persamaan (5.40) berdistribusi asimtotik  $N(0,1)$ , sehingga daerah kritis dengan tingkat signifikan  $\alpha$  dari pengujian ini adalah  $H_0$  akan ditolak jika nilai  $|G_{13}| > Z_{\alpha/2}$ .

### Statistik Uji Serentak

Pengujian serentak digunakan untuk menentukan secara simultan signifikansi dari koefisien regresi dalam model GWMPR, yang diformulasikan sebagai berikut :

$$\begin{aligned} H_0 : \beta_{h1}(\mathbf{u}_i) = \beta_{h2}(\mathbf{u}_i) = \dots = \beta_{hk}(\mathbf{u}_i) = 0 ; h=1,2,\dots,p ; i=1,2,\dots,n \\ H_1 : \text{paling sedikit ada satu } \beta_{hl}(\mathbf{u}_i) \neq 0 ; l=1,2,\dots,k \end{aligned} \quad (5.41)$$

Untuk menentukan daerah kritis dari pengujian hipotesis pada persamaan (5.41) diperlukan statistik uji yang diperoleh dengan metode LRT, melalui tahapan sebagai berikut :

- Ruang parameter di bawah  $H_0$  adalah

$\omega_3 = \{ \lambda_{00}(\mathbf{u}_i), \beta_{h00}(\mathbf{u}_i) ; h=1,2,\dots,p; i=1,2,\dots,n \}$ , sehingga nilai maksimum fungsi likelihood dapat ditentukan melalui proses berikut:

$$L(\omega_3) = \prod_{i=1}^n f(y_i | \lambda_{00}(\mathbf{u}_i), \beta_{h00}(\mathbf{u}_i))$$

$$= \prod_{i=1}^n \left( C_{i0} \exp((p-1)\lambda_{00}(\mathbf{u}_i) - \sum_{h=1}^p s_i e^{\beta_{h00}(\mathbf{u}_i)}) \right) \quad (5.42)$$

dimana

$$C_{i0} = \sum_{v=0}^q \frac{\lambda_{00}^v(\mathbf{u}_i) \prod_{h=1}^p (s_i e^{\beta_{h00}(\mathbf{u}_i)} - \lambda_{00}(\mathbf{u}_i))^{y_{hi}-v}}{v! \prod_{h=1}^p (y_{hi} - v)!}$$

Misalkan  $\hat{\theta}_{302}(\mathbf{u}_i) = (\hat{\lambda}_{00}(\mathbf{u}_i) \quad \hat{\beta}_{100}(\mathbf{u}_i) \quad \hat{\beta}_{200}(\mathbf{u}_i) \quad \dots \quad \hat{\beta}_{p00}(\mathbf{u}_i))^T$  merupakan estimator MLE dari parameter pada  $H_0$ , maka

$$L(\hat{\theta}_{302}) = \max L(\omega_4)$$

$$= \prod_{i=1}^n \left( \hat{C}_{i0} \exp((p-1)\hat{\lambda}_{00}(\mathbf{u}_i) - \sum_{h=1}^p s_i e^{\hat{\beta}_{h00}(\mathbf{u}_i)}) \right) \quad (5.43)$$

dimana

$$\hat{C}_{i0} = \sum_{v=0}^q \frac{\hat{\lambda}_{00}^v(\mathbf{u}_i) \prod_{h=1}^p (s_i e^{\hat{\beta}_{h00}(\mathbf{u}_i)} - \hat{\lambda}_{00}(\mathbf{u}_i))^{y_{hi}-v}}{v! \prod_{h=1}^p (y_{hi} - v)!}$$

Untuk menentukan estimasi parameter pada lokasi ke- $i$  yaitu  $\hat{\lambda}_{00}(\mathbf{u}_i)$  dan  $\hat{\beta}_{h00}(\mathbf{u}_i)$ , diperlukan informasi dari lokasi yang lain (misalnya lokasi ke- $j$ ) dengan pembobot  $w_{ij}$ , sehingga log-likelihood terboboti dapat dituliskan sebagai berikut :

$$\mathbb{Q}_{10} = w_{ij} \ln L(\omega_4)$$

$$= \sum_{j=1}^n w_{ij} (p-1)\lambda_{00}(\mathbf{u}_i) - \sum_{j=1}^n \sum_{h=1}^p w_{ij} s_j e^{\beta_{h00}(\mathbf{u}_i)} + \sum_{j=1}^n w_{ij} \ln C_{j0}. \quad (5.44)$$

Misalkan  $C_{j0} = \sum_{v=0}^q C_{v0j0} \prod_{h=1}^p C_{vhj0} ; j = 1, 2, \dots, n$ ,

dimana

$$C_{v0j0} = \frac{\lambda_{00}^v(\mathbf{u}_i)}{v!} \quad \text{dan} \quad C_{vhj0} = \frac{(s_j e^{\beta_{h00}(\mathbf{u}_i)} - \lambda_{00}(\mathbf{u}_i))^{y_{hj}-v}}{(y_{hj}-v)!} ; h = 1, 2, \dots, p,$$

maka hasil turunan parsial dari  $\mathbb{Q}_{10}$  terhadap  $\lambda_{00}(\mathbf{u}_i)$  dan  $\beta_{h00}(\mathbf{u}_i)$  ( $h=1, 2, \dots, p$ )

diperoleh :

$$\frac{\partial \mathbb{Q}_{10}}{\partial \lambda_{00}(\mathbf{u}_i)} = \sum_{j=1}^n w_{ij} (p-1) + \sum_{j=1}^n w_{ij} \frac{1}{C_{j0}} \frac{\partial C_{j0}}{\partial \lambda_{00}(\mathbf{u}_i)} \quad (5.45)$$

$$\frac{\partial \mathbb{Q}_{10}}{\partial \beta_{h00}(\mathbf{u}_i)} = - \sum_{j=1}^n w_{ij} s_j e^{\beta_{h00}(\mathbf{u}_i)} + \sum_{j=1}^n w_{ij} \frac{1}{C_{j0}} \frac{\partial C_{j0}}{\partial \beta_{h00}(\mathbf{u}_i)} \quad (5.46)$$

sedangkan turunan  $C_{j0}$  terhadap  $\lambda_{00}(\mathbf{u}_i)$  dan  $\beta_{h00}(\mathbf{u}_i)$  adalah

$$\frac{\partial C_{j0}}{\partial \lambda_{00}(\mathbf{u}_i)} = \sum_{v=0}^q \left[ \frac{v \lambda_{00}^{v-1}(\mathbf{u}_i)}{v!} \prod_{h=1}^p C_{vhj0} - \frac{\lambda_{00}^v(\mathbf{u}_i)}{v!} \sum_{h=1}^p (C_{vhj0}^* \prod_{\substack{g=1 \\ g \neq h}}^p C_{vgj0}) \right] \quad (5.47)$$

$$\frac{\partial C_{j0}}{\partial \beta_{h00}(\mathbf{u}_i)} = \sum_{v=0}^q \left[ \frac{\lambda_{00}^v(\mathbf{u}_i)}{v!} C_{vhj0}^* s_j e^{\beta_{h00}(\mathbf{u}_i)} \prod_{\substack{g=1 \\ g \neq h}}^p C_{vgj0} \right] \quad (5.48)$$

dimana

$$C_{vhj0}^* = \frac{(y_{hj}-v)(s_j e^{\beta_{h00}(\mathbf{u}_i)} - \lambda_{00}(\mathbf{u}_i))^{y_{hj}-v-1}}{(y_{hj}-v)!}$$

Memperhatikan persamaan (5.45) s.d. (5.48) dan disamakan nol merupakan sistem persamaan tidak *close form*, sehingga MLE tidak dapat menghasilkan penyelesaian analitik. Oleh karena itu untuk menentukan estimasi parameter dapat digunakan algoritma *Newton-Raphson* dengan formula sebagai berikut :

$$\hat{\boldsymbol{\theta}}_{302(t+1)}(\mathbf{u}_i) = \hat{\boldsymbol{\theta}}_{302(t)}(\mathbf{u}_i) - \mathbf{H}^{-1}(\hat{\boldsymbol{\theta}}_{302(t)}(\mathbf{u}_i)) \mathbf{g}(\hat{\boldsymbol{\theta}}_{302(t)}(\mathbf{u}_i)) \quad (5.49)$$

dimana

$\hat{\boldsymbol{\theta}}_{302(t)}(\mathbf{u}_i)$  adalah estimator parameter lokasi ke- $i$  pada iterasi ke- $t$ ,



$$\mathbf{g}^T(\hat{\boldsymbol{\theta}}_{302(t)}(\mathbf{u}_i)) = \left( \frac{\partial^2 Q_{10}}{\partial \lambda_{00}^2(\mathbf{u}_i)} \quad \frac{\partial^2 Q_{10}}{\partial \beta_{100}(\mathbf{u}_i)} \quad \dots \quad \frac{\partial^2 Q_{10}}{\partial \beta_{p00}(\mathbf{u}_i)} \right)_{\boldsymbol{\theta}_{302}(\mathbf{u}_i) = \hat{\boldsymbol{\theta}}_{302(t)}(\mathbf{u}_i)}$$

adalah vektor gradien lokasi ke- $i$  pada iterasi ke- $t$ , dengan elemen-elemen vektor sebagaimana tertulis pada persamaan (5.45) s.d. (5.48), dan

$$\mathbf{H}(\hat{\boldsymbol{\theta}}_{302(t)}(\mathbf{u}_i)) = \begin{pmatrix} \frac{\partial^2 Q_{10}}{\partial \lambda_{00}^2(\mathbf{u}_i)} & \frac{\partial^2 Q_{10}}{\partial \lambda_{00}(\mathbf{u}_i) \partial \beta_{100}(\mathbf{u}_i)} & \dots & \frac{\partial^2 Q_{10}}{\partial \lambda_{00}(\mathbf{u}_i) \partial \beta_{p00}(\mathbf{u}_i)} \\ \frac{\partial^2 Q_{10}}{\partial \lambda_{00}(\mathbf{u}_i) \partial \beta_{100}(\mathbf{u}_i)} & \frac{\partial^2 Q_{10}}{\partial \beta_{100}^2(\mathbf{u}_i)} & \dots & \frac{\partial^2 Q_{10}}{\partial \beta_{100}(\mathbf{u}_i) \partial \beta_{p00}(\mathbf{u}_i)} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial^2 Q_{10}}{\partial \lambda_{00}(\mathbf{u}_i) \partial \beta_{p00}(\mathbf{u}_i)} & \frac{\partial^2 Q_{10}}{\partial \beta_{100}(\mathbf{u}_i) \partial \beta_{p00}(\mathbf{u}_i)} & \dots & \frac{\partial^2 Q_{10}}{\partial \beta_{p00}^2(\mathbf{u}_i)} \end{pmatrix}_{\boldsymbol{\theta}_{302}(\mathbf{u}_i) = \hat{\boldsymbol{\theta}}_{302(t)}(\mathbf{u}_i)}$$

adalah matriks Hessian lokasi ke- $i$  pada iterasi ke- $t$ , dimana elemen-elemen matriks merupakan turunan parsial kedua dari  $Q_{10}$  terhadap kombinasi masing-masing parameternya, sebagai berikut :

$$\frac{\partial^2 Q_{10}}{\partial \lambda_{00}^2(\mathbf{u}_i)} = \sum_{j=1}^n w_{ij} \left[ \left( \frac{1}{C_{j0}} \frac{\partial^2 C_{j0}}{\partial \lambda_{00}^2(\mathbf{u}_i)} \right) - \frac{1}{C_{j0}^2} \left( \frac{\partial C_{j0}}{\partial \lambda_{00}(\mathbf{u}_i)} \right)^2 \right] \quad (5.50)$$

$$\frac{\partial^2 Q_{10}}{\partial \beta_{h00}^2(\mathbf{u}_i)} = - \sum_{j=1}^n w_{ij} s_j e^{\beta_{h00}(\mathbf{u}_i)} + \sum_{j=1}^n w_{ij} \left[ \left( \frac{1}{C_{j0}} \frac{\partial^2 C_{j0}}{\partial \beta_{h00}^2(\mathbf{u}_i)} \right) - \frac{1}{C_{j0}^2} \left( \frac{\partial C_{j0}}{\partial \beta_{h00}(\mathbf{u}_i)} \right)^2 \right] \quad (5.51)$$

$$\frac{\partial^2 Q_{10}}{\partial \lambda_{00}(\mathbf{u}_i) \partial \beta_{h00}(\mathbf{u}_i)} = \sum_{j=1}^n w_{ij} \left[ \left( \frac{1}{C_{j0}} \frac{\partial^2 C_{j0}}{\partial \lambda_{00}(\mathbf{u}_i) \partial \beta_{h00}(\mathbf{u}_i)} \right) - \left( \frac{1}{C_{j0}^2} \frac{\partial C_{j0}}{\partial \lambda_{00}(\mathbf{u}_i)} \frac{\partial C_{j0}}{\partial \beta_{h00}(\mathbf{u}_i)} \right) \right] \quad (5.52)$$

untuk  $g, h = 1, 2, \dots, p$  ;  $g \neq h$  ,

$$\frac{\partial^2 Q_{10}}{\partial \beta_{h00}(\mathbf{u}_i) \partial \beta_{g00}(\mathbf{u}_i)} = \sum_{j=1}^n w_{ij} \left[ \frac{1}{C_{j0}} \frac{\partial^2 C_{j0}}{\partial \beta_{h00}(\mathbf{u}_i) \partial \beta_{g00}(\mathbf{u}_i)} - \frac{1}{C_{j0}^2} \frac{\partial C_{j0}}{\partial \beta_{h00}(\mathbf{u}_i)} \frac{\partial C_{j0}}{\partial \beta_{g00}(\mathbf{u}_i)} \right] \quad (5.53)$$

Turunan parsial kedua dari  $C_{j0}$  terhadap masing-masing kombinasi  $\lambda_{00}(\mathbf{u}_i)$  dan  $\beta_{h00}(\mathbf{u}_i)$  sebagai berikut :

$$\frac{\partial^2 C_{j0}}{\partial \lambda_{00}^2(\mathbf{u}_i)} = \sum_{v=0}^q \left[ \frac{v(v-1)\lambda_{00}^{v-2}(\mathbf{u}_i)}{v!} \prod_{h=1}^p C_{vhj0} - \frac{2v\lambda_{00}^{v-1}(\mathbf{u}_i)}{v!} \sum_{h=1}^p (C_{vhj0}^* \prod_{\substack{g=1 \\ g \neq h}}^p C_{vgj0}) + \right. \\ \left. \frac{\lambda_{00}^v(\mathbf{u}_i)}{v!} \left( \sum_{h=1}^p (C_{vhj0}^{**} \prod_{\substack{g=1 \\ g \neq h}}^p C_{vgj0}) + \sum_{h=1}^p \sum_{\substack{g=1 \\ g \neq h}}^p C_{vhj0}^* (C_{vgj0}^* \prod_{\substack{t=1 \\ t \neq h,g}}^p C_{vtj0}) \right) \right] \quad (5.54)$$

$$\frac{\partial^2 C_j}{\partial \beta_{h00}^2(\mathbf{u}_i)} = \sum_{v=0}^q \left[ \frac{\lambda_{00}^v(\mathbf{u}_i)}{v!} \left( C_{vhj0}^{**} s_j^2 e^{2\beta_{h00}(\mathbf{u}_i)} + C_{vhj0}^* s_j e^{\beta_{h00}(\mathbf{u}_i)} \right) \prod_{\substack{g=1 \\ g \neq h}}^p C_{vgj0} \right] \quad (5.55)$$

$$\frac{\partial^2 C_{j0}}{\partial \lambda_{00}(\mathbf{u}_i) \partial \beta_{h00}(\mathbf{u}_i)} = \sum_{v=0}^q \left[ \frac{v\lambda_{00}^{v-1}(\mathbf{u}_i)}{v!} C_{vhj0}^* s_j e^{\beta_{h00}(\mathbf{u}_i)} \prod_{\substack{g=1 \\ g \neq h}}^p C_{vgj0} - \frac{\lambda_{00}^v(\mathbf{u}_i)}{v!} C_{vhj0}^{**} s_j e^{\beta_{h00}(\mathbf{u}_i)} \prod_{\substack{g=1 \\ g \neq h}}^p C_{vgj0} - \right. \\ \left. \frac{\lambda_{00}^v(\mathbf{u}_i)}{v!} C_{vhj0}^* s_j e^{\beta_{h00}(\mathbf{u}_i)} \sum_{\substack{g=1 \\ g \neq h}}^p (C_{vgj0}^* \prod_{\substack{t=1 \\ t \neq g,h}}^p C_{vtj0}) \right] \quad (5.56)$$

$$\frac{\partial^2 C_{j0}}{\partial \beta_{h00}(\mathbf{u}_i) \partial \beta_{g00}(\mathbf{u}_i)} = \sum_{v=0}^q \left( \frac{\lambda_{00}^v(\mathbf{u}_i)}{v!} C_{vhj0}^* s_j e^{\beta_{h00}(\mathbf{u}_i)} C_{vgj0}^* s_j e^{\beta_{g00}(\mathbf{u}_i)} \prod_{\substack{t=1 \\ t \neq h,g}}^p C_{vtj0} \right) \quad (5.57)$$

dimana

$$C_{vhj0}^{**} = \frac{(y_{hj} - v)(y_{hj} - v - 1)(s_j e^{\beta_{h00}(\mathbf{u}_i)} - \lambda_{00}(\mathbf{u}_i))^{(y_{hj} - v - 2)}}{(y_{hj} - v)!}.$$

Proses iterasi *Newton-Raphson* pada persamaan (5.49), dimulai dengan memasukkan nilai awal estimator parameter, yaitu :

$$\hat{\boldsymbol{\theta}}_{302(0)}(\mathbf{u}_i) = (\hat{\lambda}_{00(0)}(\mathbf{u}_i) \quad \hat{\beta}_{100(0)}(\mathbf{u}_i) \quad \hat{\beta}_{200(0)}(\mathbf{u}_i) \quad \dots \quad \hat{\beta}_{p00(0)}(\mathbf{u}_i))^T$$

dimana,

$$\hat{\lambda}_{00(0)}(\mathbf{u}_i) = \widehat{\text{cov}}[\mathbf{y}_g^*, \mathbf{y}_h^*] ; g, h = 1, 2, \dots, p ; g \neq h, \text{ dan}$$

$$\hat{\beta}_{h00(0)}(\mathbf{u}_i) = \ln(\overline{y_h^*}),$$

dengan,  $\mathbf{y}_h^* = [y_{h1}^* \quad y_{h2}^* \quad \dots \quad y_{hn}^*]^T$  adalah vektor variabel respon baru dengan elemen-elemen sebagai berikut :

$$y_{hi}^* = \begin{cases} \ln(y_{hi}/s_i) & ; y_{hi} = 1, 2, 3, \dots \\ 0 & ; y_{hi} = 0 \end{cases},$$

dan proses iterasi tersebut dihentikan jika  $\|\hat{\boldsymbol{\theta}}_{302(t+1)}(\mathbf{u}_i) - \hat{\boldsymbol{\theta}}_{302(t)}(\mathbf{u}_i)\| \leq \varepsilon$ , dengan  $\varepsilon$

bilangan riil positif yang sangat kecil.

- Himpunan parameter di bawah populasi adalah

$\Omega_3 = \{\lambda_0(\mathbf{u}_i); \boldsymbol{\beta}_h(\mathbf{u}_i); h=1,2,\dots,p; i=1,2,\dots,n\}$  sehingga nilai maksimum fungsi likelihood dapat dituliskan:

$$L(\Omega_3) = \prod_{i=1}^n f(y_{hi}; \lambda_0(\mathbf{u}_i), \boldsymbol{\beta}_h(\mathbf{u}_i))$$

$$= \prod_{i=1}^n \left( \exp((p-1)\lambda_0(\mathbf{u}_i) - \sum_{h=1}^p s_i e^{\mathbf{x}_i^T \boldsymbol{\beta}_h(\mathbf{u}_i)}) C_i \right) \quad (5.58)$$

dimana

$$C_i = \sum_{v=0}^q \frac{\lambda_0^v(\mathbf{u}_i)}{v!} \prod_{h=1}^p \frac{(s_i e^{\mathbf{x}_i^T \boldsymbol{\beta}_h(\mathbf{u}_i)} - \lambda_0(\mathbf{u}_i))^{y_{hi}-v}}{(y_{hi}-v)!}$$

Misalkan  $\hat{\boldsymbol{\theta}}_3(\mathbf{u}_i) = (\hat{\lambda}_0(\mathbf{u}_i) \quad \hat{\boldsymbol{\beta}}_1^T(\mathbf{u}_i) \quad \hat{\boldsymbol{\beta}}_2^T(\mathbf{u}_i) \quad \dots \quad \hat{\boldsymbol{\beta}}_p^T(\mathbf{u}_i); i=1,2,\dots,n)^T$  merupakan estimator MLE dari parameter pada populasi, maka

$$L(\hat{\boldsymbol{\theta}}_3) = \text{maks } L(\Omega_3)$$

$$= \prod_{i=1}^n \left( \exp((p-1)\hat{\lambda}_0(\mathbf{u}_i) - \sum_{h=1}^p s_i e^{\mathbf{x}_i^T \hat{\boldsymbol{\beta}}_h(\mathbf{u}_i)}) \hat{C}_i \right) \quad (5.59)$$

dimana

$$\hat{C}_i = \sum_{v=0}^q \frac{\hat{\lambda}_0^v(\mathbf{u}_i)}{v!} \prod_{h=1}^p \frac{(s_i e^{\mathbf{x}_i^T \hat{\boldsymbol{\beta}}_h(\mathbf{u}_i)} - \hat{\lambda}_0(\mathbf{u}_i))^{y_{hi}-v}}{(y_{hi}-v)!}$$

$\hat{\lambda}_0(\mathbf{u}_i)$  dan  $\hat{\boldsymbol{\beta}}_h(\mathbf{u}_i)$  merupakan estimator untuk parameter  $\lambda_0(\mathbf{u}_i)$  dan  $\boldsymbol{\beta}_h(\mathbf{u}_i)$  yang diperoleh dari algoritma *Newton-Raphson* pada persamaan (5.14).

- Statistik uji LR diperoleh sebagai berikut :

$$G_3 = -2 \ln \frac{L(\hat{\boldsymbol{\theta}}_{302})}{L(\hat{\boldsymbol{\theta}}_3)}$$

$$= 2[\ln L(\hat{\boldsymbol{\theta}}_3) - \ln L(\hat{\boldsymbol{\theta}}_{302})] \quad (5.60)$$

Berdasarkan nilai maksimum pada persamaan (5.43) dan (5.59), maka statistik uji pada persamaan (5.60) dapat dituliskan:

$$\begin{aligned}
G_3 &= 2 \left( \left[ (p-1) \sum_{i=1}^n \hat{\lambda}_0(\mathbf{u}_i) - \sum_{i=1}^n \sum_{h=1}^p s_i e^{\mathbf{x}_i^T \hat{\beta}_h(\mathbf{u}_i)} + \sum_{i=1}^n \ln \hat{C}_i \right] - \right. \\
&\quad \left. \left[ (p-1) \sum_{i=1}^n \hat{\lambda}_{00}(\mathbf{u}_i) - \sum_{i=1}^n \sum_{h=1}^p s_i e^{\hat{\beta}_{h00}(\mathbf{u}_i)} + \sum_{i=1}^n \ln \hat{C}_{i0} \right] \right) \\
&= 2 \left( (p-1) \sum_{i=1}^n (\hat{\lambda}_0(\mathbf{u}_i) - \hat{\lambda}_{00}(\mathbf{u}_i)) - \sum_{i=1}^n \sum_{h=1}^p s_i (e^{\mathbf{x}_i^T \hat{\beta}_h(\mathbf{u}_i)} - e^{\hat{\beta}_{h00}(\mathbf{u}_i)}) + \sum_{i=1}^n (\ln \hat{C}_i - \ln \hat{C}_{i0}) \right)
\end{aligned} \tag{5.61}$$

Triyanto, Purhadi, Otok, dan Purnami (2016)

### Daerah Kritis Uji Serentak

Daerah kritis uji *likelihood ratio* dengan tingkat signifikansi  $\alpha \in (0,1)$  untuk model GWMPR dengan kovariansi merupakan konstanta yang diformulasikan pada persamaan (5.41), didefinisikan sebagai berikut :

$$\Lambda_3 = \frac{\text{maks } L(\omega_3)}{\text{maks } L(\Omega_3)} < k_\alpha \tag{5.62}$$

dimana  $k_\alpha$  merupakan suatu konstanta yang nilainya tergantung pada  $\alpha$  dengan  $0 \leq k_\alpha \leq 1$ .

Berdasarkan persamaan (5.62), statistik uji  $G_3$  yang merupakan fungsi dari variabel random, dapat dituliskan :

$$G_3 = -2 \ln \Lambda_3. \tag{5.63}$$

Distribusi dari statistik uji  $G_3$  dituliskan dalam Teorema berikut :

#### Teorema 5.1

Misalkan  $\hat{\boldsymbol{\theta}}_{302((p+1)nx1)} = [\hat{\lambda}_{00}(\mathbf{u}_i) \quad \hat{\beta}_{100}(\mathbf{u}_i) \quad \hat{\beta}_{200}(\mathbf{u}_i) \quad \dots \quad \hat{\beta}_{p00}(\mathbf{u}_i); i=1,2,\dots,n]^T$ , dan  $\hat{\boldsymbol{\theta}}_{3((pk+p+1)nx1)} = (\hat{\lambda}_0(\mathbf{u}_i) \quad \hat{\beta}_1^T(\mathbf{u}_i) \quad \hat{\beta}_2^T(\mathbf{u}_i) \quad \dots \quad \hat{\beta}_p^T(\mathbf{u}_i); i=1,2,\dots,n)^T$  berturut-turut merupakan estimator MLE pada  $H_0$  dan populasi dari pengujian hipotesis yang diformulasikan pada persamaan (5.41), maka statistik uji  $G_3$  yang disajikan pada persamaan (5.61) berdistribusi  $\chi_{pkn}^2$ .

#### Bukti Teorema 5.1

Misalkan estimator MLE pada populasi dari pengujian hipotesis dipartisi sebagai berikut :

$$\hat{\boldsymbol{\theta}}_3 = [\hat{\boldsymbol{\theta}}_{31} \quad \hat{\boldsymbol{\theta}}_{32}]^T,$$

dimana  $\hat{\boldsymbol{\theta}}_{31} = [\hat{\beta}_{h1}(\mathbf{u}_i) \quad \hat{\beta}_{h2}(\mathbf{u}_i) \quad \cdots \quad \hat{\beta}_{hk}(\mathbf{u}_i) ; h=1,2,\dots,p; i=1,2,\dots,n]^T$ , dan

$$\hat{\boldsymbol{\theta}}_{32} = [\hat{\lambda}_0(\mathbf{u}_i) \quad \hat{\beta}_{10}(\mathbf{u}_i) \quad \hat{\beta}_{20}(\mathbf{u}_i) \quad \cdots \quad \hat{\beta}_{p0}(\mathbf{u}_i); i=1,2,\dots,n]^T,$$

sedangkan estimator MLE dan parameter yang diketahui pada  $H_0$  dipartisi sebagai berikut :

$$\hat{\boldsymbol{\theta}}_{30} = [\boldsymbol{\theta}_{301} \quad \hat{\boldsymbol{\theta}}_{302}]^T,$$

dimana  $\boldsymbol{\theta}_{301(pkn \times 1)} = [0 \quad 0 \quad \cdots \quad 0]^T$ , dan

$$\hat{\boldsymbol{\theta}}_{302} = [\hat{\lambda}_{00}(\mathbf{u}_i) \quad \hat{\beta}_{100}(\mathbf{u}_i) \quad \hat{\beta}_{200}(\mathbf{u}_i) \quad \cdots \quad \hat{\beta}_{p00}(\mathbf{u}_i), i=1,2,\dots,n]^T,$$

maka pengujian hipotesis pada persamaan (5.41) dapat dituliskan sebagai :

$$\begin{aligned} H_0 : \boldsymbol{\theta}_{31} &= \boldsymbol{\theta}_{301} \\ H_1 : \boldsymbol{\theta}_{31} &\neq \boldsymbol{\theta}_{301} \end{aligned} \quad (5.64)$$

Statistik uji  $G_3$  yang disajikan pada persamaan (5.60) dapat diuraikan sebagai berikut :

$$\begin{aligned} G_3 &= 2(\ln L(\hat{\boldsymbol{\theta}}_3) - \ln L(\hat{\boldsymbol{\theta}}_{30})) \\ &= 2(\ln L(\hat{\boldsymbol{\theta}}_3) - \ln L(\boldsymbol{\theta}_{30})) - 2(\ln L(\hat{\boldsymbol{\theta}}_{30}) - \ln L(\boldsymbol{\theta}_{30})) \end{aligned} \quad (5.65)$$

Misalkan  $l(\boldsymbol{\theta}_{30}) = \ln L(\boldsymbol{\theta}_{30})$ , maka fungsi  $l(\boldsymbol{\theta}_{30})$  dapat dihampiri oleh ekspansi Taylor derajat dua disekitar  $\hat{\boldsymbol{\theta}}_3$  sebagai berikut :

$$l(\boldsymbol{\theta}_{30}) \approx l(\hat{\boldsymbol{\theta}}_3) + \mathbf{g}(\hat{\boldsymbol{\theta}}_3)(\boldsymbol{\theta}_{30} - \hat{\boldsymbol{\theta}}_3) - \frac{1}{2}(\boldsymbol{\theta}_{30} - \hat{\boldsymbol{\theta}}_3)^T \mathbf{I}(\hat{\boldsymbol{\theta}}_3)(\boldsymbol{\theta}_{30} - \hat{\boldsymbol{\theta}}_3),$$

$$\text{dimana } \mathbf{g}(\hat{\boldsymbol{\theta}}_3) = \left. \frac{\partial l(\boldsymbol{\theta}_3)}{\partial \boldsymbol{\theta}_3} \right|_{\boldsymbol{\theta}_3 = \hat{\boldsymbol{\theta}}_3} \quad \text{dan} \quad \mathbf{I}(\hat{\boldsymbol{\theta}}_3) = - \left. \frac{\partial^2 l(\boldsymbol{\theta}_3)}{\partial \boldsymbol{\theta}_3 \partial \boldsymbol{\theta}_3^T} \right|_{\boldsymbol{\theta}_3 = \hat{\boldsymbol{\theta}}_3}.$$

Karena  $\mathbf{g}(\hat{\boldsymbol{\theta}}_3) = \mathbf{0}$ , sehingga diperoleh :

$$2(l(\hat{\boldsymbol{\theta}}_3) - l(\boldsymbol{\theta}_{30})) \approx (\hat{\boldsymbol{\theta}}_3 - \boldsymbol{\theta}_{30})^T \mathbf{I}(\hat{\boldsymbol{\theta}}_3)(\hat{\boldsymbol{\theta}}_3 - \boldsymbol{\theta}_{30}). \quad (5.66)$$

Sedangkan jika fungsi  $l(\boldsymbol{\theta}_{30})$  dihampiri oleh ekspansi Taylor derajat dua disekitar  $\hat{\boldsymbol{\theta}}_{30}$  diperoleh :

$$l(\boldsymbol{\theta}_{30}) \approx l(\hat{\boldsymbol{\theta}}_{30}) + \mathbf{g}(\hat{\boldsymbol{\theta}}_3)(\boldsymbol{\theta}_{30} - \hat{\boldsymbol{\theta}}_{30}) - \frac{1}{2}(\boldsymbol{\theta}_{30} - \hat{\boldsymbol{\theta}}_{30})^T \mathbf{I}(\hat{\boldsymbol{\theta}}_3)(\boldsymbol{\theta}_{30} - \hat{\boldsymbol{\theta}}_{30}),$$

atau dapat ditulis:

$$2(l(\hat{\boldsymbol{\theta}}_{30}) - l(\boldsymbol{\theta}_{30})) \approx (\hat{\boldsymbol{\theta}}_{30} - \boldsymbol{\theta}_{30})^T \mathbf{I}(\hat{\boldsymbol{\theta}}_3)(\hat{\boldsymbol{\theta}}_{30} - \boldsymbol{\theta}_{30}). \quad (5.67)$$

Berdasarkan persamaan (5.66) dan (5.67), statistik uji pada persamaan (5.65) dapat ditulis sebagai berikut :

$$G_3 \approx (\hat{\boldsymbol{\theta}}_3 - \boldsymbol{\theta}_{30})^T \mathbf{I}(\hat{\boldsymbol{\theta}}_3)(\hat{\boldsymbol{\theta}}_3 - \boldsymbol{\theta}_{30}) - (\hat{\boldsymbol{\theta}}_{30} - \boldsymbol{\theta}_{30})^T \mathbf{I}(\hat{\boldsymbol{\theta}}_3)(\hat{\boldsymbol{\theta}}_{30} - \boldsymbol{\theta}_{30}). \quad (5.68)$$

Misalkan,

$$\mathbf{I}(\hat{\boldsymbol{\theta}}_3)_{(pk+p+1)nx(pk+p+1)n} = \begin{bmatrix} I_{11(pk+pk)} & I_{12(pk+(p+1)n)} \\ I_{21((p+1)nxpk)} & I_{22((p+1)nx(p+1)n)} \end{bmatrix}, \text{ dan}$$

$$\mathbf{I}^{-1}(\hat{\boldsymbol{\theta}}_3)_{(pk+p+1)nx(pk+p+1)n} = \begin{bmatrix} I^{11}_{(pk+pk)} & I^{12}_{(pk+(p+1)n)} \\ I^{21}_{((p+1)nxpk)} & I^{22}_{((p+1)nx(p+1)n)} \end{bmatrix},$$

dan berdasarkan sifat distribusi bersyarat, jika diberikan  $\boldsymbol{\theta}_{31} = \boldsymbol{\theta}_{301}$ ,  $\hat{\boldsymbol{\theta}}_{31}$ , dan  $\hat{\boldsymbol{\theta}}_{32}$ , maka diperoleh :

$$\hat{\boldsymbol{\theta}}_{302} = \hat{\boldsymbol{\theta}}_{32} - I^{21}(I^{11})^{-1}(\hat{\boldsymbol{\theta}}_{31} - \boldsymbol{\theta}_{301}), \quad (5.69)$$

atau berdasarkan formula dari invers suatu partisi matriks, persamaan (5.69) dapat ditulis :

$$\hat{\boldsymbol{\theta}}_{302} = \hat{\boldsymbol{\theta}}_{32} + I_{22}^{-1}I_{21}(\hat{\boldsymbol{\theta}}_{31} - \boldsymbol{\theta}_{301}) \quad (5.70)$$

Pada pengujian hipotesis di bawah  $H_0$ , karena  $(\hat{\boldsymbol{\theta}}_{30} - \boldsymbol{\theta}_{30}) = (\mathbf{0}, \hat{\boldsymbol{\theta}}_{302} - \boldsymbol{\theta}_{32})$ , dan memperhatikan persamaan (5.70), yaitu :  $\hat{\boldsymbol{\theta}}_{302} - \boldsymbol{\theta}_{32} = \hat{\boldsymbol{\theta}}_{32} - \boldsymbol{\theta}_{32} + I_{22}^{-1}I_{21}(\hat{\boldsymbol{\theta}}_{31} - \boldsymbol{\theta}_{301})$ , maka

$$\begin{aligned} (\hat{\boldsymbol{\theta}}_{30} - \boldsymbol{\theta}_{30})^T \mathbf{I}(\hat{\boldsymbol{\theta}}_3)(\hat{\boldsymbol{\theta}}_{30} - \boldsymbol{\theta}_{30}) &= (\hat{\boldsymbol{\theta}}_{302} - \boldsymbol{\theta}_{32})^T I_{22}(\hat{\boldsymbol{\theta}}_{302} - \boldsymbol{\theta}_{32}) \\ &= \begin{bmatrix} \hat{\boldsymbol{\theta}}_{31} - \boldsymbol{\theta}_{301} \\ \hat{\boldsymbol{\theta}}_{32} - \boldsymbol{\theta}_{32} \end{bmatrix}^T \begin{bmatrix} I_{12}I_{22}^{-1}I_{21} & I_{12} \\ I_{21} & I_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \hat{\boldsymbol{\theta}}_{31} - \boldsymbol{\theta}_{301} \\ \hat{\boldsymbol{\theta}}_{32} - \boldsymbol{\theta}_{32} \end{bmatrix} \end{aligned}$$

Statistik uji  $G_3$  pada persamaan (5.68) dapat dituliskan sebagai berikut :

$$\begin{aligned} G_3 &\approx (\hat{\boldsymbol{\theta}}_{31} - \boldsymbol{\theta}_{301})^T (I_{11} - I_{12}I_{22}^{-1}I_{21})(\hat{\boldsymbol{\theta}}_{31} - \boldsymbol{\theta}_{301}) \\ &= (\hat{\boldsymbol{\theta}}_{31} - \boldsymbol{\theta}_{301})^T (I^{11})^{-1}(\hat{\boldsymbol{\theta}}_{31} - \boldsymbol{\theta}_{301}) \end{aligned} \quad (5.71)$$

Memperhatikan sifat normalitas untuk MLE pada persamaan (2.63), maka distribusi dari partisi parameter adalah :

$$\begin{bmatrix} \hat{\boldsymbol{\theta}}_{31} - \boldsymbol{\theta}_{31} \\ \hat{\boldsymbol{\theta}}_{32} - \boldsymbol{\theta}_{32} \end{bmatrix} \stackrel{a}{\sim} N \left( \mathbf{0}, \mathbf{I}^{-1}(\boldsymbol{\theta}_0) \equiv \begin{bmatrix} I^{11} & I^{12} \\ I^{21} & I^{22} \end{bmatrix} \right).$$

Sehingga diperoleh :

$$(\hat{\boldsymbol{\theta}}_{31} - \boldsymbol{\theta}_{31}) \stackrel{a}{\sim} N(\mathbf{0}, I^{11})$$

$$(I^{11})^{-1/2} (\hat{\boldsymbol{\theta}}_{31} - \boldsymbol{\theta}_{31}) \stackrel{a}{\sim} N(\mathbf{0}, \mathbf{I}_{pkn})$$

$$G_3 = (\hat{\boldsymbol{\theta}}_{31} - \boldsymbol{\theta}_{31})^T (I^{11})^{-1} (\hat{\boldsymbol{\theta}}_{31} - \boldsymbol{\theta}_{31}) \stackrel{a}{\sim} \chi_{pkn}^2 \quad \blacksquare$$

Daerah kritis uji serentak diperoleh berdasarkan persamaan (5.62) dapat dituliskan sebagai berikut :

$$\begin{aligned} \alpha &= P(\Lambda_3 < k_\alpha ; \omega_3) \\ &= P(-2 \ln \Lambda_3 > -2 \ln k_\alpha ; \omega_3) \\ &= P(G_3 > c_3 ; \omega_3) \text{ dengan } c_3 = -2 \ln k_\alpha \\ &= P(G_3 > \chi_{pkn, \alpha}^2) \end{aligned} \quad (5.72)$$

Dalam model MPR banyaknya parameter secara otomatis menjadi banyaknya parameter efektif dalam model, akan tetapi untuk model GWMPR karena dimungkinkan adanya kesamaan sebagian parameter suatu lokasi dengan lokasi lain maka parameter tidak semua parameter menjadi parameter efektif dalam model. Untuk selanjutnya kriteria pengujiannya adalah tolak  $H_0$  jika  $G_3 > \chi_{(v_3 - v_{30}, \alpha)}^2$  dengan  $\alpha$  adalah tingkat signifikansi yang digunakan, dimana  $v_{30}$  dan  $v_3$  berturut-turut merupakan banyaknya parameter efektif dalam model pada ruang  $\omega_3$  dan  $\Omega_3$  yang diperoleh dari formula pada persamaan (2.36)

### Statistik Uji Parsial

Pengujian parsial pada model GWMPR dengan kovariansi merupakan konstanta digunakan untuk menguji apakah parameter  $\beta_{hl}(\mathbf{u}_i)$  ( $h = 1, 2, \dots, p$  ;  $l = 1, 2, \dots, k$  ;  $i = 1, 2, \dots, n$ ) berpengaruh terhadap model.

Formulasi pengujian parsial, misalnya untuk nilai  $h=m$  dan  $i=j$  dapat dituliskan:

$$\begin{aligned} H_0 : \beta_{ml}(\mathbf{u}_j) &= 0 \\ H_1 : \beta_{ml}(\mathbf{u}_j) &\neq 0 \end{aligned} \quad (5.73)$$

Untuk menentukan daerah kritis pengujian hipotesis pada persamaan (5.73) diperlukan statistika uji, dengan tahapan sebagai berikut :

Misalkan,

$\hat{\boldsymbol{\theta}}_{304} = (\hat{\lambda}_{00}(\mathbf{u}_i), \hat{\beta}_{h00}(\mathbf{u}_i), \hat{\beta}_{h01}(\mathbf{u}_i), \dots, \hat{\beta}_{m0(l-1)}(\mathbf{u}_j), \hat{\beta}_{m0(l+1)}(\mathbf{u}_j), \dots, \hat{\beta}_{h0k}(\mathbf{u}_i) ; h=1, 2, \dots, p)^T$   
dan  $\hat{\boldsymbol{\theta}}_3 = (\hat{\lambda}_0(\mathbf{u}_i), \hat{\beta}_h(\mathbf{u}_i) ; h=1, 2, \dots, p ; i=1, 2, \dots, n)^T$  berturut-turut merupakan estimator MLE dari parameter pada  $H_0$  dan populasi.

Analog dengan pembuktian pada Teorema 5.1, dengan merubah partisi estimator di bawah populasi menjadi :  $\hat{\boldsymbol{\theta}}_3 = [\hat{\boldsymbol{\theta}}_{33} \quad \hat{\boldsymbol{\theta}}_{34}]^T$ , dimana  $\hat{\boldsymbol{\theta}}_{33} = [\hat{\beta}_{ml}(\mathbf{u}_j)]$  dan  $\hat{\boldsymbol{\theta}}_{34} = (\hat{\lambda}_{00}(\mathbf{u}_i), \hat{\beta}_{h0}(\mathbf{u}_i), \hat{\beta}_{h1}(\mathbf{u}_i), \dots, \hat{\beta}_{m(l-1)}(\mathbf{u}_j), \hat{\beta}_{m(l+1)}(\mathbf{u}_j), \dots, \hat{\beta}_{hk}(\mathbf{u}_i))^T$ .

Jika estimator MLE dan parameter yang diketahui pada  $H_0$  dibuat partisi menjadi :  $\hat{\boldsymbol{\theta}}_{30} = [\boldsymbol{\theta}_{303} \quad \hat{\boldsymbol{\theta}}_{304}]^T$ , dimana  $\boldsymbol{\theta}_{303} = [0]$  dan

$$\hat{\boldsymbol{\theta}}_{304} = (\hat{\lambda}_{00}(\mathbf{u}_i), \hat{\beta}_{h00}(\mathbf{u}_i), \hat{\beta}_{h01}(\mathbf{u}_i), \dots, \hat{\beta}_{m0(l-1)}(\mathbf{u}_j), \hat{\beta}_{m0(l+1)}(\mathbf{u}_j), \dots, \hat{\beta}_{h0k}(\mathbf{u}_i))^T,$$

maka statistik uji LR untuk menguji hipotesis (5.73) dapat dituliskan sebagai berikut :

$$\begin{aligned} G_{33} &\approx (\hat{\boldsymbol{\theta}}_{33} - \boldsymbol{\theta}_{303})^T (I_{11} - I_{12} I_{22}^{-1} I_{21}) (\hat{\boldsymbol{\theta}}_{33} - \boldsymbol{\theta}_{303}) \\ &= (\hat{\boldsymbol{\theta}}_{33} - \boldsymbol{\theta}_{303})^T (I^{11})^{-1} (\hat{\boldsymbol{\theta}}_{33} - \boldsymbol{\theta}_{303}) \end{aligned} \quad (5.74)$$

dimana,

$$\begin{aligned} \mathbf{I}(\hat{\boldsymbol{\theta}}_3)_{(pk+p+1)n \times (pk+p+1)n} &= \begin{bmatrix} I_{11(1 \times 1)} & I_{12(1 \times (pk+p+1)n-1)} \\ I_{21((pk+p+1)n-1) \times 1} & I_{22((pk+p+1)n-1) \times (pk+p+1)n-1)} \end{bmatrix}, \text{ dan} \\ \mathbf{I}^{-1}(\hat{\boldsymbol{\theta}}_3)_{(pk+p+1)n \times (pk+p+1)n} &= \begin{bmatrix} I^{11}_{(1 \times 1)} & I^{12}_{(1 \times (pk+p+1)n-1)} \\ I^{21}_{((pk+p+1)n-1) \times 1} & I^{22}_{((pk+p+1)n-1) \times (pk+p+1)n-1)} \end{bmatrix}. \end{aligned}$$

Berdasarkan sifat normalitas untuk MLE pada persamaan (2.63), dan memperhatikan persamaan (5.74) dengan vektor  $\boldsymbol{\theta}_{33}$  hanya mempunyai satu



elemen, yaitu:  $\beta_{ml}(\mathbf{u}_j)$ , maka statistik uji untuk hipotesis pada persamaan (5.73) dapat dituliskan sebagai :

$$G_{33} = \frac{\hat{\beta}_{ml}^2(\mathbf{u}_j)}{\widehat{\text{var}}[\hat{\beta}_{ml}(\mathbf{u}_j)]} \sim \chi_1^2 \quad (5.75)$$

atau dapat juga menggunakan akar kuadrat dari persamaan (5.75), sehingga diperoleh statistik uji :

$$Z_3 = \frac{\hat{\beta}_{ml}(\mathbf{u}_j)}{\sqrt{\widehat{\text{var}}[\hat{\beta}_{ml}(\mathbf{u}_j)]}} \sim N(0,1) \quad (5.76)$$

dimana  $\widehat{\text{var}}(\hat{\beta}_{ml}(\mathbf{u}_j))$  diperoleh dari elemen diagonal ke  $[(k+1)(m-1)+(l+2)]$  dari matriks  $[\mathbf{I}(\hat{\boldsymbol{\theta}}_3(\mathbf{u}_j))]^{-1}$ .

### Daerah Kritis Uji Parsial

Daerah kritis uji parsial dengan tingkat signifikansi  $\alpha \in (0,1)$  untuk model GWMPR dengan kovariansi merupakan konstanta yang diformulasikan pada persamaan (5.73), dapat dituliskan sebagai berikut :

$$\begin{aligned} \alpha &= P(G_{33} > c_3 ; \omega_3) \\ &= P(Z_3 < -\sqrt{c_3} \vee Z_3 > \sqrt{c_3} ; \omega_3) \\ &= P(Z_3 < -Z_{\alpha/2} \vee Z_3 > Z_{\alpha/2} ) \\ &= P(|Z_3| > Z_{\alpha/2} ) \end{aligned} \quad (5.77)$$

Berdasarkan persamaan (5.77), maka daerah kritis dapat dituliskan sebagai :

$$H_0 \text{ ditolak jika nilai } |Z_3| > Z_{\alpha/2} \quad (5.78)$$

### 5.2.2 Pengujian Hipotesis Model GWMPR dengan Kovariansi merupakan fungsi variabel bebas

Pada bagian ini akan dibahas tentang penentuan statistik uji beserta distribusinya untuk uji kesamaan model GWMPR dan MPR, uji parameter secara serentak, dan uji parameter secara parsial dari model GWMPR dengan kovariansi merupakan fungsi variabel bebas.

### Statistik Uji Kesamaan Model MPR dengan GWMPR

Uji kesamaan untuk mengetahui apakah ada perbedaan model GWMPR dan MPR, diformulasikan sebagai berikut :

$$\begin{aligned} H_0 : \beta_{cl}(\mathbf{u}_i) &= \beta_{cl} \quad ; c = 0, 1, 2, \dots, p \ ; l = 1, 2, \dots, k \ ; i = 1, 2, \dots, n \\ H_1 : &\text{paling sedikit ada satu } \beta_{cl}(\mathbf{u}_i) \neq \beta_{cl} \end{aligned} \quad (5.79)$$

Formula pengujian hipotesis pada persamaan (5.79) merupakan model *non-nested*, sehingga dalam penelitian ini digunakan statistik uji dari *Young's test* sebagai berikut :

$$G_{24} = \frac{\sqrt{n} \left( \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n m_i \right)}{\sqrt{\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n (m_i - \bar{m})^2}} \quad (5.80)$$

dimana

$$m_i = (\ln \hat{B}_i - \ln \hat{D}_i) - s_i (e^{\mathbf{x}_i^T \hat{\beta}_0} - e^{\mathbf{x}_i^T \hat{\beta}_0(\mathbf{u}_i)}) - \sum_{h=1}^p s_i (e^{\mathbf{x}_i^T \hat{\beta}_h} - e^{\mathbf{x}_i^T \hat{\beta}_h(\mathbf{u}_i)}).$$

$$\hat{B}_i = \sum_{v=0}^q \frac{(s_i e^{\mathbf{x}_i^T \hat{\beta}_0})^v}{v!} \prod_{h=1}^p \frac{(s_i e^{\mathbf{x}_i^T \hat{\beta}_h})^{y_{hi}-v}}{(y_{hi}-v)!}$$

$$\hat{D}_i = \sum_{v=0}^q \frac{(s_i e^{\mathbf{x}_i^T \hat{\beta}_0(\mathbf{u}_i)})^v}{v!} \prod_{h=1}^p \frac{(s_i e^{\mathbf{x}_i^T \hat{\beta}_h(\mathbf{u}_i)})^{y_{hi}-v}}{(y_{hi}-v)!}$$

$\hat{\beta}_0$  dan  $\hat{\beta}_h$  merupakan estimator untuk  $\beta_0$  dan  $\beta_h$  yang diperoleh dari algoritma *Newton-Raphson* pada persamaan (4.28), sedangkan  $\hat{\beta}_0(\mathbf{u}_i)$  dan  $\hat{\beta}_h(\mathbf{u}_i)$  merupakan estimator untuk parameter  $\beta_0(\mathbf{u}_i)$  dan  $\beta_h(\mathbf{u}_i)$  yang diperoleh dari algoritma *Newton-Raphson* pada persamaan (5.30).

Berdasarkan teorema limit sentral, statistik uji kesamaan model GWMPR dan MPR pada persamaan (5.80) berdistribusi asimtotik  $N(0,1)$ , sehingga daerah kritis dengan tingkat signifikan  $\alpha$  dari pengujian ini adalah  $H_0$  akan ditolak jika nilai  $|G_{24}| > Z_{\alpha/2}$ .

### Statistik Uji Serentak

Pengujian parameter secara serentak digunakan untuk menentukan secara simultan signifikansi dari koefisien regresi dalam model GWMPR, yang diformulasikan sebagai berikut :

$$\begin{aligned} H_0 : \beta_{c1}(\mathbf{u}_i) &= \beta_{c2}(\mathbf{u}_i) = \dots = \beta_{ck}(\mathbf{u}_i) = 0 ; c = 0, 1, 2, \dots, p ; i = 1, 2, \dots, n \\ H_1 : &\text{paling sedikit ada satu } \beta_{cl}(\mathbf{u}_i) \neq 0 ; l = 1, 2, \dots, k \end{aligned} \quad (5.81)$$

Untuk menentukan daerah kritis dari pengujian hipotesis pada persamaan (5.81) diperlukan statistik uji yang diperoleh dengan metode LRT, melalui tahapan sebagai berikut :

- Ruang parameter di bawah  $H_0$  adalah

$\omega_4 = \{\beta_{000}(\mathbf{u}_i), \beta_{h00}(\mathbf{u}_i); h = 1, 2, \dots, p; i = 1, 2, \dots, n\}$  sehingga nilai maksimum fungsi likelihood dapat ditentukan melalui proses berikut:

$$\begin{aligned} L(\omega_4) &= \prod_{i=1}^n f(y_i | \beta_{000}(\mathbf{u}_i), \beta_{h00}(\mathbf{u}_i)) \\ &= \prod_{i=1}^n \left( D_{i0} \exp(s_i e^{\beta_{000}(\mathbf{u}_i)} - \sum_{h=1}^p s_i e^{\beta_{h00}(\mathbf{u}_i)}) \right) \end{aligned} \quad (5.82)$$

dimana,

$$D_{i0} = \sum_{v=0}^q \frac{(s_i e^{\beta_{000}(\mathbf{u}_i)})^v}{v!} \prod_{h=1}^p \frac{(s_i e^{\beta_{h00}(\mathbf{u}_i)})^{y_{hi}-v}}{(y_{hi}-v)!}$$

Misalkan  $\hat{\boldsymbol{\theta}}_{402}(\mathbf{u}_i) = (\hat{\beta}_{000}(\mathbf{u}_i) \quad \hat{\beta}_{100}(\mathbf{u}_i) \quad \hat{\beta}_{200}(\mathbf{u}_i) \quad \dots \quad \hat{\beta}_{p00}(\mathbf{u}_i))^T$  merupakan estimator MLE dari parameter pada  $H_0$ , maka

$$\begin{aligned} L(\hat{\boldsymbol{\theta}}_{402}) &= \text{maks } L(\omega_4) \\ &= \prod_{i=1}^n \left( \hat{D}_{i0} \exp(s_i e^{\hat{\beta}_{000}(\mathbf{u}_i)} - \sum_{h=1}^p s_i e^{\hat{\beta}_{h00}(\mathbf{u}_i)}) \right) \end{aligned} \quad (5.83)$$

dimana

$$\hat{D}_{i0} = \sum_{v=0}^q \frac{(s_i e^{\hat{\beta}_{000}(\mathbf{u}_i)})^v}{v!} \prod_{h=1}^p \frac{(s_i e^{\hat{\beta}_{h00}(\mathbf{u}_i)})^{y_{hi}-v}}{(y_{hi}-v)!}$$

Untuk menentukan estimasi parameter pada lokasi ke- $i$  yaitu  $\hat{\beta}_{000}(\mathbf{u}_i)$  dan  $\hat{\beta}_{h00}(\mathbf{u}_i)$ , diperlukan informasi dari lokasi yang lain (misalnya lokasi ke- $j$ ) dengan pembobot  $w_{ij}$ , sehingga log-likelihood terboboti dapat dituliskan sebagai berikut :

$$\begin{aligned}\mathbb{Q}_{20} &= w_{ij} \ln L(\omega_4) \\ &= \sum_{j=1}^n w_{ij} \ln D_{j0} - \sum_{j=1}^n w_{ij} s_j e^{\hat{\beta}_{000}(\mathbf{u}_i)} - \sum_{j=1}^n \sum_{h=1}^p w_{ij} s_j e^{\beta_{h00}(\mathbf{u}_i)}\end{aligned}\quad (5.84)$$

$$\text{Misalkan } D_{j0} = \sum_{v=0}^q D_{v0j0} \prod_{h=1}^p D_{vhj0} ; j = 1, 2, \dots, n$$

$$\text{dimana, } D_{v0j0} = \frac{(s_j e^{\beta_{000}(\mathbf{u}_i)})^v}{v!} \quad \text{dan} \quad D_{vhj0} = \frac{(s_j e^{\beta_{h00}(\mathbf{u}_i)})^{y_{hj}-v}}{(y_{hj}-v)!} ; h = 1, 2, \dots, p$$

maka hasil turunan parsial dari  $\mathbb{Q}_{20}$  terhadap  $\beta_{000}(\mathbf{u}_i)$  dan  $\beta_{h00}(\mathbf{u}_i)$  ( $h=1, 2, \dots, p$ ) diperoleh :

$$\frac{\partial \mathbb{Q}_{20}}{\partial \beta_{000}(\mathbf{u}_i)} = \sum_{j=1}^n w_{ij} \frac{1}{D_{j0}} \frac{\partial D_{j0}}{\partial \beta_{000}(\mathbf{u}_i)} - \sum_{j=1}^n w_{ij} s_j e^{\beta_{000}(\mathbf{u}_i)} \quad (5.85)$$

$$\frac{\partial \mathbb{Q}_{20}}{\partial \beta_{h00}(\mathbf{u}_i)} = \sum_{j=1}^n w_{ij} \frac{1}{D_{j0}} \frac{\partial D_{j0}}{\partial \beta_{h00}(\mathbf{u}_i)} - \sum_{j=1}^n w_{ij} s_j e^{\beta_{h00}(\mathbf{u}_i)} \quad (5.86)$$

sedangkan turunan  $D_{j0}$  terhadap  $\beta_{000}(\mathbf{u}_i)$  dan  $\beta_{h00}(\mathbf{u}_i)$  adalah

$$\frac{\partial D_{j0}}{\partial \beta_{000}(\mathbf{u}_i)} = \sum_{v=0}^q \frac{v(s_j e^{\beta_{000}(\mathbf{u}_i)})^v}{v!} \prod_{h=1}^p D_{vhj0} \quad (5.87)$$

$$\frac{\partial D_{j0}}{\partial \beta_{h00}(\mathbf{u}_i)} = \sum_{v=0}^q D_{v0j0} \frac{(y_{hj}-v)(s_j e^{\beta_{h00}(\mathbf{u}_i)})^{y_{hj}-v}}{(y_{hj}-v)!} \prod_{\substack{g=1 \\ g \neq h}}^p D_{vgj0} \quad (5.88)$$

Memperhatikan persamaan (5.85) s.d. (5.88) dan disamakan nol merupakan sistem persamaan tidak *close form*, sehingga MLE tidak dapat menghasilkan penyelesaian analitik. Oleh karena itu untuk menentukan estimasi parameter dapat digunakan algoritma *Newton-Raphson* dengan formula sebagai berikut :

$$\hat{\theta}_{402(t+1)}(\mathbf{u}_i) = \hat{\theta}_{402(t)}(\mathbf{u}_i) - \mathbf{H}^{-1}(\hat{\theta}_{402(t)}(\mathbf{u}_i)) \mathbf{g}(\hat{\theta}_{402(t)}(\mathbf{u}_i)) \quad (5.89)$$

dimana

$\hat{\theta}_{402(t)}(\mathbf{u}_i)$  adalah estimator parameter lokasi ke- $i$  pada iterasi ke- $t$ .

$$\mathbf{g}^T(\hat{\theta}_{402(t)}(\mathbf{u}_i)) = \left( \frac{\partial Q_{20}}{\partial \beta_{000}(\mathbf{u}_i)} \quad \frac{\partial Q_{20}}{\partial \beta_{100}(\mathbf{u}_i)} \quad \dots \quad \frac{\partial Q_{20}}{\partial \beta_{p00}(\mathbf{u}_i)} \right)_{\theta_{402}(\mathbf{u}_i) = \hat{\theta}_{402(t)}(\mathbf{u}_i)} \quad \text{adalah}$$

vektor gradien lokasi ke- $i$  pada iterasi ke- $t$ , dengan elemen-elemen vektor sebagaimana tertulis pada persamaan (5.85) s.d. (5.88), dan

$$\mathbf{H}(\hat{\theta}_{402(t)}(\mathbf{u}_i)) = \begin{pmatrix} \frac{\partial^2 Q_{20}}{\partial \beta_{000}^2(\mathbf{u}_i)} & \frac{\partial^2 Q_{20}}{\partial \beta_{000}(\mathbf{u}_i) \partial \beta_{100}(\mathbf{u}_i)} & \dots & \frac{\partial^2 Q_{20}}{\partial \beta_{000}(\mathbf{u}_i) \partial \beta_{p00}(\mathbf{u}_i)} \\ \frac{\partial^2 Q_{20}}{\partial \beta_{000}(\mathbf{u}_i) \partial \beta_{100}(\mathbf{u}_i)} & \frac{\partial^2 Q_{20}}{\partial \beta_{100}^2(\mathbf{u}_i)} & \dots & \frac{\partial^2 Q_{20}}{\partial \beta_{100}(\mathbf{u}_i) \partial \beta_{p00}(\mathbf{u}_i)} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial^2 Q_{20}}{\partial \beta_{000}(\mathbf{u}_i) \partial \beta_{p00}(\mathbf{u}_i)} & \frac{\partial^2 Q_{20}}{\partial \beta_{100}(\mathbf{u}_i) \partial \beta_{p00}(\mathbf{u}_i)} & \dots & \frac{\partial^2 Q_{20}}{\partial \beta_{p00}^2(\mathbf{u}_i)} \end{pmatrix}_{\theta_{402}(\mathbf{u}_i) = \hat{\theta}_{402(t)}(\mathbf{u}_i)}$$

adalah matriks Hessian lokasi ke- $i$  pada iterasi ke- $t$ , dimana elemen-elemen matriks merupakan turunan parsial kedua dari  $Q_{20}$  terhadap kombinasi masing-masing parameternya, sebagai berikut :

$$\frac{\partial^2 Q_{20}}{\partial \beta_{000}^2(\mathbf{u}_i)} = \sum_{j=1}^n w_{ij} \left[ \left( \frac{1}{D_{j0}} \frac{\partial^2 D_{j0}}{\partial \beta_{000}^2(\mathbf{u}_i)} \right) - \frac{1}{D_{j0}^2} \left( \frac{\partial D_{j0}}{\partial \beta_{000}(\mathbf{u}_i)} \right)^2 - s_j e^{\beta_{000}(\mathbf{u}_i)} \right] \quad (5.90)$$

$$\frac{\partial^2 Q_{20}}{\partial \beta_{h00}^2(\mathbf{u}_i)} = \sum_{j=1}^n w_{ij} \left[ \left( \frac{1}{D_{j0}} \frac{\partial^2 D_{j0}}{\partial \beta_{h00}^2(\mathbf{u}_i)} \right) - \frac{1}{D_{j0}^2} \left( \frac{\partial D_{j0}}{\partial \beta_{h00}(\mathbf{u}_i)} \right)^2 - s_j e^{\beta_{h00}(\mathbf{u}_i)} \right] \quad (5.91)$$

$$\frac{\partial^2 Q_{20}}{\partial \beta_{000}(\mathbf{u}_i) \partial \beta_{h00}(\mathbf{u}_i)} = \sum_{j=1}^n w_{ij} \left[ \left( \frac{1}{D_{j0}} \frac{\partial^2 D_{j0}}{\partial \beta_{000}(\mathbf{u}_i) \partial \beta_{h00}(\mathbf{u}_i)} \right) - \left( \frac{1}{D_{j0}^2} \frac{\partial D_{j0}}{\partial \beta_{000}(\mathbf{u}_i)} \frac{\partial D_{j0}}{\partial \beta_{h00}(\mathbf{u}_i)} \right) \right] \quad (5.92)$$

untuk  $g, h = 1, 2, \dots, p ; g \neq h$ ,

$$\frac{\partial^2 Q_{20}}{\partial \beta_{h00}(\mathbf{u}_i) \partial \beta_{g00}(\mathbf{u}_i)} = \sum_{j=1}^n w_{ij} \left[ \frac{1}{D_{j0}} \frac{\partial^2 D_{j0}}{\partial \beta_{h00}(\mathbf{u}_i) \partial \beta_{g00}(\mathbf{u}_i)} - \frac{1}{D_{j0}^2} \frac{\partial D_{j0}}{\partial \beta_{h00}(\mathbf{u}_i)} \frac{\partial D_{j0}}{\partial \beta_{g00}(\mathbf{u}_i)} \right] \quad (5.93)$$

Turunan parsial kedua dari  $D_{j0}$  terhadap masing-masing kombinasi  $\beta_{000}(\mathbf{u}_i)$  dan  $\beta_{h00}(\mathbf{u}_i)$  sebagai berikut :

$$\frac{\partial^2 D_{j0}}{\partial \beta_{000}^2(\mathbf{u}_i)} = \sum_{v=0}^q v^2 \frac{(s_j e^{\beta_{000}(\mathbf{u}_i)})^v}{v!} \prod_{h=1}^p D_{vhj0} \quad (5.94)$$

$$\frac{\partial^2 D_{j0}}{\partial \beta_{h00}^2(\mathbf{u}_i)} = \sum_{v=0}^q D_{v0j0} (y_{hj} - v)^2 \frac{(s_j e^{\beta_{h00}(\mathbf{u}_i)})^{y_{hj}-v}}{(y_{hj} - v)!} \prod_{\substack{g=1 \\ g \neq h}}^p D_{vgj0} \quad (5.95)$$

$$\frac{\partial^2 D_{j0}}{\partial \beta_{000}(\mathbf{u}_i) \partial \beta_{h00}(\mathbf{u}_i)} = \sum_{v=0}^q \frac{v(s_j e^{\beta_{000}(\mathbf{u}_i)})^v}{v!} \frac{(y_{hj} - v)(s_j e^{\beta_{h00}(\mathbf{u}_i)})^{y_{hj}-v}}{(y_{hj} - v)!} \prod_{\substack{g=1 \\ g \neq h}}^p D_{vgj0} \quad (5.96)$$

$$\frac{\partial^2 D_{j0}}{\partial \beta_{h00}(\mathbf{u}_i) \partial \beta_{g00}(\mathbf{u}_i)} = \sum_{v=0}^q D_{v0j0} \frac{(y_{hj} - v)(s_j e^{\beta_{h00}(\mathbf{u}_i)})^{y_{hj}-v}}{(y_{hj} - v)!} \frac{(y_{gj} - v)(s_j e^{\beta_{g00}(\mathbf{u}_i)})^{y_{gj}-v}}{(y_{gj} - v)!} \prod_{\substack{t=1 \\ t \neq g, h}}^p D_{vtj0} \quad (5.97)$$

Proses iterasi *Newton-Raphson* pada persamaan (5.49), dimulai dengan memasukkan nilai awal estimator parameter, yaitu :

$$\hat{\boldsymbol{\theta}}_{402(0)}(\mathbf{u}_i) = (\hat{\beta}_{000(0)}(\mathbf{u}_i) \quad \hat{\beta}_{100(0)}(\mathbf{u}_i) \quad \hat{\beta}_{200(0)}(\mathbf{u}_i) \quad \dots \quad \hat{\beta}_{p00(0)}(\mathbf{u}_i))^T$$

dimana

$$\hat{\beta}_{000(0)}(\mathbf{u}_i) = \ln(\overline{y_0^*}) \text{ , dengan } \mathbf{y}_0^* = \hat{E}[\mathbf{y}_0 | \mathbf{y}_h, \boldsymbol{\theta}_4] \text{ , dan}$$

$$\hat{\beta}_{h00(0)}(\mathbf{u}_i) = \ln(\overline{y_h^* - y_0^*}) \text{ ,}$$

dengan  $\mathbf{y}_h^* = [y_{h1}^* \quad y_{h2}^* \quad \dots \quad y_{hn}^*]^T$  adalah vektor variabel respon baru

dengan elemen vektor sebagai berikut :

$$y_{hi}^* = \begin{cases} \ln(y_{hi}/s_i) & ; y_{hi} = 1, 2, 3, \dots \\ 0 & ; y_{hi} = 0 \end{cases} \text{ ,}$$

dan proses iterasi ini dihentikan jika  $\|\hat{\boldsymbol{\theta}}_{402(t+1)}(\mathbf{u}_i) - \hat{\boldsymbol{\theta}}_{402(t)}(\mathbf{u}_i)\| \leq \varepsilon$  , dengan  $\varepsilon$

bilangan riil positif yang sangat kecil.

- Himpunan parameter di bawah populasi adalah

$\Omega_4 = \{\boldsymbol{\beta}_0(\mathbf{u}_i), \boldsymbol{\beta}_h(\mathbf{u}_i); h=1, 2, \dots, p; i=1, 2, \dots, n\}$  sehingga nilai maksimum fungsi likelihood dapat dituliskan:

$$L(\Omega_4) = \prod_{i=1}^n f(y_{hi} | \beta_0(\mathbf{u}_i), \beta_h(\mathbf{u}_i))$$

$$= \prod_{i=1}^n \left( D_i \exp(-s_i e^{\mathbf{x}_i^T \hat{\beta}_0(\mathbf{u}_i)} - \sum_{h=1}^p s_i e^{\mathbf{x}_i^T \hat{\beta}_h(\mathbf{u}_i)}) \right) \quad (5.98)$$

$$\text{dimana, } D_j = \sum_{v=0}^q \frac{(s_j e^{\mathbf{x}_j^T \hat{\beta}_0(\mathbf{u}_i)})^v}{v!} \prod_{h=1}^p \frac{(s_j e^{\mathbf{x}_j^T \hat{\beta}_h(\mathbf{u}_i)})^{y_{hj}-v}}{(y_{hj}-v)!}$$

Misalkan  $\hat{\theta}_4(\mathbf{u}_i) = (\hat{\beta}_0^T(\mathbf{u}_i) \quad \hat{\beta}_1^T(\mathbf{u}_i) \quad \hat{\beta}_2^T(\mathbf{u}_i) \quad \dots \quad \hat{\beta}_p^T(\mathbf{u}_i); i=1,2,\dots,n)^T$  merupakan estimator MLE dari parameter pada populasi, maka

$$L(\hat{\theta}_4) = \text{maks } L(\Omega_4)$$

$$= \prod_{i=1}^n \left( \exp(-s_i e^{\mathbf{x}_i^T \hat{\beta}_0(\mathbf{u}_i)} - \sum_{h=1}^p s_i e^{\mathbf{x}_i^T \hat{\beta}_h(\mathbf{u}_i)}) \hat{D}_i \right) \quad (5.99)$$

$$\text{dimana, } \hat{D}_i = \sum_{v=0}^q \frac{(s_i e^{\mathbf{x}_i^T \hat{\beta}_0(\mathbf{u}_i)})^v}{v!} \prod_{h=1}^p \frac{(s_i e^{\mathbf{x}_i^T \hat{\beta}_h(\mathbf{u}_i)})^{y_{hi}-v}}{(y_{hi}-v)!}$$

$\hat{\beta}_0(\mathbf{u}_i)$  dan  $\hat{\beta}_h(\mathbf{u}_i)$  merupakan estimator untuk parameter  $\beta_0(\mathbf{u}_i)$  dan  $\beta_h(\mathbf{u}_i)$  yang diperoleh dari algoritma *Newton-Raphson* pada persamaan (5.30).

- Berdasarkan nilai maksimum pada persamaan (5.83) dan (5.99), maka statistik uji LRT diformulasikan sebagai berikut :

$$G_4 = -2 \ln \frac{L(\hat{\theta}_{402})}{L(\hat{\theta}_4)}$$

$$= 2[\ln L(\hat{\theta}_4) - \ln L(\hat{\theta}_{402})] \quad (5.100)$$

Berdasarkan nilai maksimum pada persamaan (5.83) dan (5.99), maka statistik uji pada persamaan (5.100) dapat dituliskan:

$$G_4 = 2 \left( \left[ -\sum_{i=1}^n s_i e^{\mathbf{x}_i^T \hat{\beta}_0(\mathbf{u}_i)} - \sum_{i=1}^n \sum_{h=1}^p s_i e^{\mathbf{x}_i^T \hat{\beta}_h(\mathbf{u}_i)} + \sum_{i=1}^n \ln \hat{D}_i \right] - \left[ -\sum_{i=1}^n s_i e^{\hat{\beta}_{000}(\mathbf{u}_i)} - \sum_{i=1}^n \sum_{h=1}^p s_i e^{\hat{\beta}_{h00}(\mathbf{u}_i)} + \sum_{i=1}^n \ln \hat{D}_{i0} \right] \right)$$

$$= 2 \left( -\sum_{i=1}^n s_i (e^{\mathbf{x}_i^T \hat{\beta}_0(\mathbf{u}_i)} - e^{\hat{\beta}_{000}(\mathbf{u}_i)}) - \sum_{i=1}^n \sum_{h=1}^p s_i (e^{\mathbf{x}_i^T \hat{\beta}_h(\mathbf{u}_i)} - e^{\hat{\beta}_{h00}(\mathbf{u}_i)}) + \sum_{i=1}^n (\ln \hat{D}_i - \ln \hat{D}_{i0}) \right) \quad (5.101)$$

### Daerah Kritis Uji Serentak

Daerah kritis uji *likelihood ratio* dengan tingkat signifikansi  $\alpha \in (0,1)$  untuk model GWMPR dengan kovariansi merupakan fungsi variabel bebas yang diformulasikan pada persamaan (5.81), didefinisikan sebagai berikut :

$$\Lambda_4 = \frac{\max L(\omega_4)}{\max L(\Omega_4)} < k_\alpha \quad (5.102)$$

dimana  $k_\alpha$  merupakan suatu konstanta yang nilainya tergantung pada  $\alpha$  dengan  $0 \leq k_\alpha \leq 1$ .

Berdasarkan persamaan (5.102), maka statistik uji  $G_4$  yang merupakan fungsi variabel random, dapat dituliskan :

$$G_4 = -2 \ln \Lambda_4 \quad (5.103)$$

Distribusi dari statistik uji  $G_4$  dituliskan dalam Teorema berikut :

#### Teorema 5.2

Misalkan  $\hat{\boldsymbol{\theta}}_{402((p+1)nx1)} = [\hat{\beta}_{000}(\mathbf{u}_i) \quad \hat{\beta}_{100}(\mathbf{u}_i) \quad \hat{\beta}_{200}(\mathbf{u}_i) \quad \dots \quad \hat{\beta}_{p00}(\mathbf{u}_i); i=1,2,\dots,n]^T$  dan  $\hat{\boldsymbol{\theta}}_{4((k+1)(p+1)nx1)} = (\hat{\beta}_0^T(\mathbf{u}_i) \quad \hat{\beta}_1^T(\mathbf{u}_i) \quad \hat{\beta}_2^T(\mathbf{u}_i) \quad \dots \quad \hat{\beta}_p^T(\mathbf{u}_i); i=1,2,\dots,n)^T$  berturut-turut merupakan estimator MLE pada  $H_0$  dan populasi dari pengujian hipotesis yang diformulasikan pada persamaan (5.81), maka statistik uji  $G_4$  yang disajikan pada persamaan (5.101) berdistribusi  $\chi^2_{(p+1)kn}$ .

#### Bukti Teorema 5.2

Misalkan estimator MLE pada populasi dari pengujian hipotesis dipartisi sebagai berikut :

$$\hat{\boldsymbol{\theta}}_4 = [\hat{\boldsymbol{\theta}}_{41} \quad \hat{\boldsymbol{\theta}}_{42}]^T,$$

dimana  $\hat{\boldsymbol{\theta}}_{41} = [\hat{\beta}_{c1}(\mathbf{u}_i) \quad \hat{\beta}_{c2}(\mathbf{u}_i) \quad \dots \quad \hat{\beta}_{ck}(\mathbf{u}_i); c=0,1,2,\dots,p; i=1,2,\dots,n]^T$ , dan

$$\hat{\boldsymbol{\theta}}_{42} = [\hat{\beta}_{00}(\mathbf{u}_i) \quad \hat{\beta}_{10}(\mathbf{u}_i) \quad \hat{\beta}_{20}(\mathbf{u}_i) \quad \dots \quad \hat{\beta}_{p0}(\mathbf{u}_i)]^T,$$

sedangkan estimator MLE dan parameter yang diketahui pada  $H_0$  dipartisi sebagai berikut :

$$\hat{\boldsymbol{\theta}}_{40} = [\boldsymbol{\theta}_{401} \quad \hat{\boldsymbol{\theta}}_{402}]^T,$$



dimana  $\boldsymbol{\theta}_{401((p+1)kn \times 1)} = [0 \ 0 \ \dots \ 0]^T$  dan

$$\hat{\boldsymbol{\theta}}_{402} = [\hat{\beta}_{000}(\mathbf{u}_i) \ \hat{\beta}_{100}(\mathbf{u}_i) \ \hat{\beta}_{200}(\mathbf{u}_i) \ \dots \ \hat{\beta}_{p00}(\mathbf{u}_i)]^T,$$

maka pengujian hipotesis pada persamaan (5.81) dapat dituliskan sebagai :

$$\begin{aligned} H_0 : \boldsymbol{\theta}_{41} &= \boldsymbol{\theta}_{401} \\ H_1 : \boldsymbol{\theta}_{41} &\neq \boldsymbol{\theta}_{401} \end{aligned} \quad (5.104)$$

Analog dengan bukti Teorema 5.1, statistik uji  $G_4$  yang disajikan pada persamaan (5.100) dapat diuraikan sebagai berikut :

$$\begin{aligned} G_4 &\approx (\hat{\boldsymbol{\theta}}_4 - \boldsymbol{\theta}_{40})^T \mathbf{I}(\hat{\boldsymbol{\theta}}_4)(\hat{\boldsymbol{\theta}}_4 - \boldsymbol{\theta}_{40}) - (\hat{\boldsymbol{\theta}}_{40} - \boldsymbol{\theta}_{40})^T \mathbf{I}(\hat{\boldsymbol{\theta}}_4)(\hat{\boldsymbol{\theta}}_{40} - \boldsymbol{\theta}_{40}). \\ &= (\hat{\boldsymbol{\theta}}_{41} - \boldsymbol{\theta}_{401})^T (I_{11} - I_{12}I_{22}^{-1}I_{21})(\hat{\boldsymbol{\theta}}_{41} - \boldsymbol{\theta}_{401}) \\ &= (\hat{\boldsymbol{\theta}}_{41} - \boldsymbol{\theta}_{401})^T (I^{11})^{-1}(\hat{\boldsymbol{\theta}}_{41} - \boldsymbol{\theta}_{401}) \end{aligned} \quad (5.105)$$

dimana,

$$\begin{aligned} \mathbf{I}(\hat{\boldsymbol{\theta}}_4)_{(p+1)(k+1)nx(p+1)(k+1)n} &= \begin{bmatrix} I_{11(p+1)knx(p+1)kn} & I_{12(p+1)knx(p+1)n} \\ I_{21(p+1)nx(p+1)kn} & I_{22(p+1)nx(p+1)n} \end{bmatrix}, \text{ dan} \\ \mathbf{I}^{-1}(\hat{\boldsymbol{\theta}}_4)_{(p+1)(k+1)nx(p+1)(k+1)n} &= \begin{bmatrix} I^{11}_{(p+1)knx(p+1)kn} & I^{12}_{(p+1)knx(p+1)n} \\ I^{21}_{(p+1)nx(p+1)kn} & I^{22}_{(p+1)nx(p+1)n} \end{bmatrix}. \end{aligned}$$

Memperhatikan sifat normalitas untuk MLE pada persamaan (2.63), maka distribusi dari partisi parameter adalah :

$$\begin{bmatrix} \hat{\boldsymbol{\theta}}_{41} - \boldsymbol{\theta}_{41} \\ \hat{\boldsymbol{\theta}}_{42} - \boldsymbol{\theta}_{42} \end{bmatrix} \stackrel{a}{\sim} N \left( \mathbf{0}, \mathbf{I}^{-1}(\boldsymbol{\theta}_4) \equiv \begin{bmatrix} I^{11} & I^{12} \\ I^{21} & I^{22} \end{bmatrix} \right).$$

Sehingga diperoleh :

$$\begin{aligned} (\hat{\boldsymbol{\theta}}_{41} - \boldsymbol{\theta}_{41}) &\stackrel{a}{\sim} N(\mathbf{0}, I^{11}) \\ (I^{11})^{-1/2}(\hat{\boldsymbol{\theta}}_{41} - \boldsymbol{\theta}_{41}) &\stackrel{a}{\sim} N(\mathbf{0}, \mathbf{I}_{(p+1)kn}) \\ G_4 = (\hat{\boldsymbol{\theta}}_{41} - \boldsymbol{\theta}_{401})^T (I^{11})^{-1}(\hat{\boldsymbol{\theta}}_{41} - \boldsymbol{\theta}_{401}) &\stackrel{a}{\sim} \chi^2_{(p+1)kn} \quad \blacksquare \end{aligned}$$

Daerah kritis uji serentak diperoleh berdasarkan persamaan (5.103) dapat ditulis sebagai berikut :

$$\begin{aligned}
\alpha &= P(\Lambda_4 < k_\alpha ; \omega_4) \\
&= P(-2 \ln \Lambda_4 > -2 \ln k_\alpha ; \omega_4) \\
&= P(G_4 > c_4 ; \omega_4) \text{ dengan } c_4 = -2 \ln k_\alpha \\
&= P(G_4 > \chi_{(p+1)kn, \alpha}^2) \quad (5.106)
\end{aligned}$$

Dalam Model GWMPR dimungkinkan adanya kesamaan sebagian parameter suatu lokasi dengan lokasi lain, maka tidak semua parameter menjadi parameter efektif dalam model. Untuk selanjutnya kriteria pengujiannya adalah :

$$H_0 \text{ ditolak jika nilai } G_4 > \chi_{v_4 - v_{40}, \alpha}^2. \quad (5.107)$$

Dimana,  $v_{40}$  dan  $v_4$  berturut-turut merupakan jumlah parameter efektif dalam model pada ruang  $\omega_4$  dan  $\Omega_4$  yang diperoleh dari formula pada persamaan (2.36)

### Statistik Uji Parsial

Pengujian parsial pada model GWMPR dengan kovariansi merupakan fungsi variabel bebas digunakan untuk menguji apakah parameter  $\beta_{cl}(\mathbf{u}_i) (c = 0, 1, 2, \dots, p ; l = 1, 2, \dots, k ; i = 1, 2, \dots, n)$  berpengaruh terhadap model. Formulasi pengujian parsial, misalnya untuk nilai  $c=m$  dan  $i=j$  dapat dituliskan:

$$\begin{aligned}
H_0 : \beta_{ml}(\mathbf{u}_j) &= 0 \\
H_1 : \beta_{ml}(\mathbf{u}_j) &\neq 0 \quad (5.108)
\end{aligned}$$

Jika  $\hat{\boldsymbol{\theta}}_{404} = (\hat{\beta}_{c00}(\mathbf{u}_i), \hat{\beta}_{c01}(\mathbf{u}_i), \dots, \hat{\beta}_{m0(l-1)}(\mathbf{u}_j), \hat{\beta}_{m0(l+1)}(\mathbf{u}_j), \dots, \hat{\beta}_{c0k}(\mathbf{u}_i) ; c = 0, 1, 2, \dots, p)^T$  dan  $\hat{\boldsymbol{\theta}}_4 = [\hat{\boldsymbol{\beta}}_0^T(\mathbf{u}_i) \ \hat{\boldsymbol{\beta}}_1^T(\mathbf{u}_i) \ \hat{\boldsymbol{\beta}}_2^T(\mathbf{u}_i) \ \dots \ \hat{\boldsymbol{\beta}}_p^T(\mathbf{u}_i)]^T$  berturut-turut merupakan estimator MLE dari parameter pada  $H_0$  dan populasi.

Analog dengan pembuktian pada Teorema 5.2, dengan merubah partisi estimator di bawah populasi menjadi :  $\hat{\boldsymbol{\theta}}_4 = [\hat{\boldsymbol{\theta}}_{43} \ \hat{\boldsymbol{\theta}}_{44}]^T$ ,

dimana  $\hat{\boldsymbol{\theta}}_{43} = [\hat{\beta}_{ml}(\mathbf{u}_j)]$  dan

$$\hat{\boldsymbol{\theta}}_{44} = (\hat{\beta}_{c0}(\mathbf{u}_i), \hat{\beta}_{c1}(\mathbf{u}_i), \dots, \hat{\beta}_{m(l-1)}(\mathbf{u}_j), \hat{\beta}_{m(l+1)}(\mathbf{u}_j), \dots, \hat{\beta}_{ck}(\mathbf{u}_i))^T.$$

Jika estimator MLE dan parameter yang diketahui pada  $H_0$  dibuat partisi menjadi :  $\hat{\boldsymbol{\theta}}_{40} = [\boldsymbol{\theta}_{403} \quad \hat{\boldsymbol{\theta}}_{404}]^T$ ,

dimana  $\boldsymbol{\theta}_{403} = [0]$  dan

$$\hat{\boldsymbol{\theta}}_{404} = (\hat{\beta}_{c00}(\mathbf{u}_i), \hat{\beta}_{c01}(\mathbf{u}_i), \dots, \hat{\beta}_{m0(l-1)}(\mathbf{u}_j), \hat{\beta}_{m0(l+1)}(\mathbf{u}_j), \dots, \hat{\beta}_{c0k}(\mathbf{u}_i))^T,$$

maka statistik uji LR untuk menguji hipotesis (5.108) dapat dituliskan sebagai berikut :

$$\begin{aligned} G_{44} &\approx (\hat{\boldsymbol{\theta}}_{43} - \boldsymbol{\theta}_{403})^T (I_{11} - I_{12} I_{22}^{-1} I_{21}) (\hat{\boldsymbol{\theta}}_{43} - \boldsymbol{\theta}_{403}) \\ &= (\hat{\boldsymbol{\theta}}_{43} - \boldsymbol{\theta}_{403})^T (I^{11})^{-1} (\hat{\boldsymbol{\theta}}_{43} - \boldsymbol{\theta}_{403}) \end{aligned} \quad (5.109)$$

dimana

$$\begin{aligned} \mathbf{I}(\hat{\boldsymbol{\theta}}_4)_{(p+1)(k+1)n \times (p+1)(k+1)n} &= \begin{bmatrix} I_{11(1 \times 1)} & I_{12(1 \times ((p+1)(k+1)n-1))} \\ I_{21(((p+1)(k+1)n-1) \times 1)} & I_{22(((p+1)(k+1)n-1) \times ((p+1)(k+1)n-1))} \end{bmatrix}, \text{ dan} \\ \mathbf{I}^{-1}(\hat{\boldsymbol{\theta}}_4)_{(p+1)(k+1)n \times (p+1)(k+1)n} &= \begin{bmatrix} I^{11}_{(1 \times 1)} & I^{12}_{(1 \times ((p+1)(k+1)n-1))} \\ I^{21}_{(((p+1)(k+1)n-1) \times 1)} & I^{22}_{(((p+1)(k+1)n-1) \times ((p+1)(k+1)n-1))} \end{bmatrix}. \end{aligned}$$

Berdasarkan sifat normalitas untuk MLE pada persamaan (2.63), dan memperhatikan persamaan (5.109) dengan vektor  $\boldsymbol{\theta}_{43}$  hanya mempunyai satu elemen, yaitu:  $\beta_{ml}(\mathbf{u}_j)$ , maka statistik uji untuk hipotesis pada persamaan (5.108) dapat dituliskan sebagai :

$$G_{44} = \frac{\hat{\beta}_{ml}^2(\mathbf{u}_j)}{\widehat{\text{var}}[\hat{\beta}_{ml}(\mathbf{u}_j)]} \sim \chi_1^2 \quad (5.110)$$

atau dapat juga menggunakan akar kuadrat dari persamaan(5.110), sehingga diperoleh statistik uji :

$$Z_4 = \frac{\hat{\beta}_{ml}(\mathbf{u}_j)}{\sqrt{\widehat{\text{var}}[\hat{\beta}_{ml}(\mathbf{u}_j)]}} \sim N(0,1) \quad (5.111)$$

dimana  $\widehat{\text{var}}[\hat{\beta}_{ml}(\mathbf{u}_j)]$  diperoleh dari elemen diagonal ke  $[m(k+1) + (l+1)]$  dari matriks  $[\mathbf{I}(\boldsymbol{\theta}_4(\mathbf{u}_j))]^{-1}$ .

Daerah kritis dari pengujian hipotesis pada persamaan (5.108) adalah :

$$H_0 \text{ ditolak jika nilai } |Z_4| > Z_{\alpha/2}. \quad (5.112)$$



## **BAB VI**

### **PENERAPAN MODEL MPR DAN GWMPR PADA DATA KEMATIAN IBU, NEONATAL DINI DAN NEONATAL LANJUT**

Pada bab ini dilakukan penerapan model *multivariate Poisson regression* (MPR) dan *geographically weighted multivariate Poisson regression* (GWMPR) untuk memodelkan jumlah kematian ibu, neonatal dini, dan neonatal lanjut di Provinsi Jawa Tengah. Pemodelan dibagi menjadi dua bagian berdasarkan kovariansi, yaitu : kovariansi merupakan konstanta dan kovariansi merupakan fungsi variabel bebas. Penerapan model dimulai dengan subbab 6.1 disajikan deskripsi data penelitian, dilanjutkan subbab 6.2 tentang pengujian prasyarat analisis data model MPR dan GWMPR, yaitu : uji distribusi variabel respon, uji korelasi antar variabel respon, dan uji multikolinearitas. Pada subbab 6.3 dilakukan pemodelan jumlah kematian ibu, neonatal dini, dan neonatal lanjut dengan model MPR yang dibagi ke dalam subbab 6.3.1 dan subbab 6.3.2 berturut-turut untuk model MPR dengan kovariansi merupakan konstanta dan model MPR dengan kovariansi merupakan fungsi variabel bebas. Selanjutnya pada subbab 6.4 dilakukan pemodelan jumlah kematian ibu, neonatal dini, dan neonatal lanjut dengan model GWMPR yang dibagi ke dalam subbab 6.4.1 dan subbab 6.4.2 berturut-turut untuk model GWMPR dengan kovariansi merupakan konstanta dan model GWMPR dengan kovariansi merupakan fungsi variabel bebas. Pada bagian terakhir bab ini dikemukakan perbandingan hasil pemodelan jumlah kematian ibu, neonatal dini, dan neonatal lanjut dari keempat model berdasarkan nilai AIC dan MSE masing-masing model.

#### **6.1 Deskripsi Data Penelitian**

Variabel dalam penelitian ini sebagaimana diuraikan dalam bab III, terdiri atas tiga variabel respon, yaitu : jumlah kematian ibu, neonatal dini, dan neonatal lanjut, serta sepuluh variabel bebas yang diduga berpengaruh terhadap

variabel respon. Deskripsi data penelitian, yaitu : nilai minimum, nilai maksimum, rata-rata, dan standar deviasi, disajikan pada Tabel 6.1.

Tabel 6.1 Nilai Minimum, Maksimum, Rata-rata, dan Standar Deviasi dari Variabel-variabel Penelitian

Variabel	Minimum	Maximum	Rata-rata	Standar Deviasi
Jumlah kematian ibu ( $Y_1$ )	1,00	61,00	19,14	12,12
Jumlah kematian neonatal dini ( $Y_2$ )	16,00	207,00	101,14	50,08
Jumlah kematian neonatal lanjut ( $Y_3$ )	3,00	62,00	25,83	16,18
Persentase kunjungan ibu hamil K4 ( $X_1$ )	80,81	98,80	92,22	3,84
Persentase ibu hamil yang mendapatkan tablet Fe3 ( $X_2$ )	73,48	97,77	91,01	5,06
Persentase kunjungan neonatal lengkap ( $X_3$ )	87,77	100,00	97,18	2,27
Persentase bayi dengan berat badan lahir rendah ( $X_4$ )	0,07	10,13	4,23	1,78
Persentase rumah sehat ( $X_5$ )	36,87	89,43	66,21	12,78
Rasio posyandu aktif per 100.000 penduduk ( $X_6$ )	26,01	179,11	88,93	34,76
Rasio dokter umum per 100.000 penduduk ( $X_7$ )	10,30	162,70	32,89	34,88
Persentase penduduk usia 10 tahun ke atas yang melek huruf ( $X_8$ )	83,44	97,68	91,62	3,42
Persentase perempuan yang menikah di bawah usia 17 tahun ( $X_9$ )	5,48	34,95	19,69	8,38
Persentase penduduk miskin ( $X_{10}$ )	5,25	22,08	13,86	4,46

Jumlah kematian ibu, neonatal dini, dan neonatal lanjut di Provinsi Jawa Tengah sebagaimana disajikan pada Tabel 6.1 didominasi oleh jumlah kematian

neonatal dini dengan rata-rata mencapai 101,14 jiwa yang jauh lebih banyak daripada jumlah kematian neonatal lanjut sebesar 25,83 jiwa dan jumlah kematian ibu sebesar 19,14 jiwa. Sementara itu, berdasarkan data untuk masing-masing kabupaten/kota yang disajikan pada Lampiran 1, jumlah kematian ibu tertinggi terjadi di Kabupaten Brebes sebesar 61 jiwa dari 33.074 kelahiran hidup. Sedangkan jumlah kematian neonatal dini dan neonatal lanjut tertinggi berturut-turut terjadi di Kabupaten Banyumas sebesar 207 jiwa dari 27.744 kelahiran hidup dan Kabupaten Cilacap sebesar 62 jiwa dari 29.652 kelahiran hidup.

Untuk selanjutnya sebagai prasyarat analisis data untuk model MPR dan GWMPR dilakukan uji distribusi variabel respon, uji korelasi antar variabel respon, dan uji multikolinieritas. Pengujian yang pertama adalah uji distribusi variabel respon, untuk mengetahui apakah ketiga variabel respon berdistribusi Poisson trivariat. Dalam penelitian ini digunakan *Crockett's test*, dengan statistik uji dituliskan pada Lampiran 4.

Mempertimbangkan adanya faktor spasial dari data jumlah kematian ibu, neonatal dini, dan neonatal lanjut, maka pengujian distribusi Poisson Trivariat dari variabel respon dibagi menjadi 6 kelompok berdasarkan wilayah karesidenan, yaitu : Banyumas, Pekalongan, Kedu, Surakarta, Semarang, dan Pati. Nilai statistik uji untuk masing-masing karesidenan yang diperoleh berdasarkan perhitungan pada Lampiran 4, disajikan pada Tabel 6.2.

Tabel 6.2 Nilai Statistik Uji Distribusi Poisson Trivariat dari Variabel Respon

Karesidenan	$T$	Karesidenan	$T$
Banyumas	2,655	Pekalongan	4,311
Kedu	3,395	Semarang	3,645
Pati	2,741	Surakarta	3,085

Kesimpulan hasil pengujian diperoleh bahwa untuk masing-masing karesidenan  $H_0$  tidak ditolak karena nilai statistik uji  $T$  lebih kecil dari  $\chi^2_{(0.05;3)} = 7,815$ . Hal itu berarti untuk setiap karesidenan, data variabel respon berasal dari populasi berdistribusi Poisson trivariat.

Pengujian kedua adalah uji korelasi antar variabel respon yang digunakan untuk mengetahui apakah ada korelasi yang signifikan antar variabel respon, sehingga data layak untuk dianalisis secara multivariat. Nilai korelasi antar variabel respon disajikan pada Tabel 6.3.

Tabel 6.3 Nilai Korelasi Antar Variabel respon

Variabel Respon	Y <sub>1</sub>	Y <sub>2</sub>	Y <sub>3</sub>
Y <sub>1</sub>	1,000	0,717	0,743
Y <sub>2</sub>	0,717	1,000	0,719
Y <sub>3</sub>	0,743	0,719	1,000

Untuk menguji apakah ada korelasi yang signifikan antar variabel respon digunakan *Sphericity Test*, dengan formulasi hipotesis sebagai berikut:

$$H_0 : \mathbf{R} = \mathbf{I}$$

$$H_1 : \mathbf{R} \neq \mathbf{I}$$

Nilai statistik uji yang diperoleh berdasarkan perhitungan pada Lampiran 6 adalah  $W = 138,29$  yang lebih besar dari  $\chi^2_{(0,05;5)} = 11,07$ , sehingga  $H_0$  ditolak. Hal itu berarti ada korelasi yang signifikan antar variabel respon.

Tabel 6.4 Nilai Korelasi Antar Variabel Bebas

	X <sub>1</sub>	X <sub>2</sub>	X <sub>3</sub>	X <sub>4</sub>	X <sub>5</sub>	X <sub>6</sub>	X <sub>7</sub>	X <sub>8</sub>	X <sub>9</sub>	X <sub>10</sub>
X <sub>1</sub>	1,00	0,60	-0,15	-0,30	0,42	0,09	0,39	0,28	-0,46	-0,34
X <sub>2</sub>	0,60	1,00	0,04	0,07	0,33	0,25	0,32	0,09	-0,37	-0,11
X <sub>3</sub>	-0,15	0,04	1,00	0,16	0,04	-0,04	0,04	0,10	0,01	0,12
X <sub>4</sub>	-0,30	0,07	0,16	1,00	-0,08	0,31	-0,21	0,06	0,24	0,12
X <sub>5</sub>	0,42	0,33	0,04	-0,08	1,00	0,30	0,49	0,35	-0,63	-0,52
X <sub>6</sub>	0,09	0,25	-0,04	0,31	0,30	1,00	0,24	0,13	-0,59	-0,01
X <sub>7</sub>	0,39	0,32	0,04	-0,21	0,49	0,24	1,00	0,57	-0,67	-0,53
X <sub>8</sub>	0,28	0,09	0,10	0,06	0,35	0,13	0,57	1,00	-0,43	-0,43
X <sub>9</sub>	-0,46	-0,37	0,01	0,24	-0,63	-0,59	-0,67	-0,43	1,00	0,53
X <sub>10</sub>	-0,34	-0,11	0,12	0,12	-0,52	-0,01	-0,53	-0,43	0,53	1,00



Sementara itu pada Tabel 6.4 disajikan nilai korelasi antar variabel bebas, yang digunakan sebagai gambaran apakah ada kasus multikolinieritas. Berdasarkan tabel tersebut, terlihat bahwa tidak terdapat korelasi yang sangat tinggi antar variabel-variabel bebas yang menyebabkan adanya kasus multikolinearitas. Korelasi tertinggi terjadi pada variabel bebas  $X_7$  dan  $X_9$  sebesar -0,67.

Cara lain untuk mendeteksi adanya multikolinieritas adalah dengan mempertimbangkan nilai *VIF*. Hasil nilai *VIF* untuk masing-masing variabel bebas disajikan pada Tabel 6.5.

Tabel 6.5 Nilai *VIF* untuk masing-masing Variabel Bebas

Variabel	$R^2$	<i>VIF</i>	Variabel	$R^2$	<i>VIF</i>
$X_1$	0,587	2,421	$X_6$	0,720	3,571
$X_2$	0,546	2,203	$X_7$	0,601	2,506
$X_3$	0,161	1,192	$X_8$	0,472	1,894
$X_4$	0,603	2,519	$X_9$	0,840	6,250
$X_5$	0,476	1,908	$X_{10}$	0,586	2,415

Terlihat pada Tabel 6.5, bahwa nilai *VIF* terbesar ditunjukkan oleh  $X_9$  sebesar 6,250, sedangkan nilai *VIF* terkecil ditunjukkan oleh  $X_3$  sebesar 1,192. Secara keseluruhan nilai *VIF* untuk masing-masing variabel bebas kurang dari 10. Hal itu mengindikasikan bahwa tidak ada kasus multikolinieritas antara variabel bebas, sehingga semua variabel bebas bisa dimasukkan dalam model.

## 6.2. Pemodelan Jumlah Kematian Ibu, Neonatal Dini, dan Neonatal Lanjut dengan MPR

Model MPR merupakan regresi global, sehingga setiap lokasi diasumsikan homogen. Untuk pemodelan jumlah kematian ibu, neonatal dini, dan neonatal lanjut dilakukan dengan mengasumsikan kovariansi merupakan konstanta dan kovariansi merupakan fungsi variabel bebas.

### 6.2.1. Model MPR dengan Kovariansi Merupakan Konstanta (Model 1)

Pemodelan jumlah kematian ibu, neonatal dini, dan neonatal lanjut di Provinsi Jawa Tengah, dimulai dengan menentukan estimasi parameter model MPR yang dilakukan menggunakan metode MLE dan penyelesaian secara iteratif dengan algoritma *Newton Raphson* sebagaimana disajikan pada persamaan (4.13). Hasil estimasi parameter, standar *error*, dan nilai statistik uji Z yang diperoleh berdasarkan perhitungan melalui program Matlab pada Lampiran 7, disajikan pada Tabel 6.6 dan Tabel 6.7.

Tabel 6.6 Estimasi Parameter dan Nilai Statistik Uji Parsial Model 1

Par	IBU			NEONATAL DINI			NEONATAL LANJUT		
	Est	Se	Z	Est	Se	Z	Est	Se	Z
$\beta_0$	-2,371	2,723	-0,871	-3,581	1,217	-2,943	-1,930	2,426	-0,796
$\beta_1$	0,009	0,017	0,494	0,013	0,007	1,882	-0,046	0,014	-3,255
$\beta_2$	-0,003	0,011	-0,299	-0,036	0,005	-7,603	0,002	0,011	0,164
$\beta_3$	-0,037	0,018	-2,101	0,003	0,009	0,334	-0,015	0,017	-0,867
$\beta_4$	0,053	0,037	1,420	0,090	0,016	5,706	0,075	0,033	2,292
$\beta_5$	-0,007	0,005	-1,467	0,002	0,002	0,851	0,006	0,004	1,425
$\beta_6$	-0,007	0,002	-3,285	0,001	0,001	0,526	-0,002	0,002	-1,247
$\beta_7$	-0,003	0,002	-1,294	0,001	0,001	1,484	0,003	0,002	1,825
$\beta_8$	-0,001	0,017	-0,048	-0,007	0,007	-0,905	0,005	0,014	0,357
$\beta_9$	-0,020	0,011	-1,705	0,011	0,005	2,358	-0,007	0,010	-0,713
$\beta_{10}$	0,005	0,013	0,363	0,006	0,006	1,004	0,009	0,012	0,802

Tabel 6.7 Estimasi Parameter dan Nilai Statistik Uji Parsial  
untuk Kovariansi Model 1

Par	Est	Se	Z
$\lambda_0$	2,359	0,725	3,253

Pengujian parameter secara serentak pada model MPR dilakukan dengan metode LRT yang diformulasikan sebagai berikut :

$$H_0 : \beta_{h1} = \beta_{h2} = \dots = \beta_{h10} = 0 \quad ; h = 1, 2, 3$$

$$H_1 : \text{paling sedikit ada satu } \beta_{hl} \neq 0 \quad ; h = 1, 2, 3 \quad ; l = 1, 2, \dots, 10$$

Nilai statistik uji serentak yang diperoleh berdasarkan perhitungan dengan program Matlab pada Lampiran 7 adalah  $G_{1a} = 246,954$  yang lebih besar dari  $\chi^2_{0.05;30} = 43,770$ , sehingga  $H_0$  ditolak. Hal itu berarti, paling sedikit ada satu variabel bebas yang berpengaruh signifikan terhadap variabel respon.

Untuk mengetahui variabel bebas mana yang berpengaruh signifikan terhadap variabel respon, dilakukan pengujian parameter secara parsial. Untuk menguji secara parsial parameter  $\beta_{hl} (h = 1, 2, 3 ; l = 1, 2, \dots, 10)$  diformulasikan sebagai berikut :

$$H_0 : \beta_{hl} = 0$$

$$H_1 : \beta_{hl} \neq 0$$

Nilai estimasi parameter dan statistik uji Z yang disajikan pada Tabel 6.6, terlihat bahwa beberapa variabel bebas mempunyai nilai  $|Z| > Z_{0.025} = 1,96$  yang menunjukkan bahwa variabel tersebut berpengaruh signifikan terhadap variabel respon. Variabel-variabel tersebut adalah :  $X_3$  dan  $X_6$  terhadap  $Y_1$ , yang kedua  $X_2$ ,  $X_4$  dan  $X_9$  terhadap  $Y_2$ , sedangkan untuk  $Y_3$  ada variabel  $X_1$  dan  $X_4$  yang berpengaruh signifikan.

Selanjutnya dilakukan pemilihan model MPR “terbaik”, sehingga model yang terbentuk memuat variabel bebas yang minimal tetapi memberikan kontribusi yang optimal terhadap variabel respon. Untuk pemilihan model MPR “terbaik” digunakan metode *Best Subsets Regression* dengan mempertimbangkan nilai *Akaike's Information Criterion* (AIC). Tiga nilai AIC terkecil untuk semua kombinasi variabel bebas yang diperoleh berdasarkan perhitungan dengan program Matlab pada Lampiran 7, disajikan dalam Tabel 6.8.

Tabel 6.8 Nilai AIC Tiga Terkecil untuk Kombinasi Variabel Bebas Model 1

Banyak Var Bebas	Variabel Bebas dalam Model	AIC
10	$X_1, X_2, X_3, X_4, X_5, X_6, X_7, X_8, X_9, X_{10}$	838,291
9	$X_1, X_2, X_3, X_4, X_5, X_6, X_7, X_9, X_{10}$	833,269
	$X_1, X_2, X_3, X_4, X_5, X_6, X_7, X_8, X_9$	833,921
	$X_1, X_2, X_4, X_5, X_6, X_7, X_8, X_9, X_{10}$	837,174
8	$X_1, X_2, X_3, X_4, X_5, X_6, X_7, X_9$	828,995
	$X_1, X_2, X_4, X_5, X_6, X_7, X_9, X_{10}$	832,115
	$X_1, X_2, X_3, X_4, X_6, X_7, X_9, X_{10}$	832,760
7	$X_1, X_2, X_4, X_5, X_6, X_7, X_9$	827,910
	$X_1, X_2, X_3, X_4, X_6, X_7, X_9$	828,100
	$X_1, X_2, X_3, X_4, X_5, X_6, X_9$	831,254
6	$X_1, X_2, X_4, X_6, X_7, X_9$	827,834 <sup>*)</sup>
	$X_1, X_2, X_4, X_5, X_6, X_9$	829,633
	$X_1, X_2, X_3, X_4, X_6, X_9$	833,205
5	$X_1, X_2, X_4, X_6, X_9$	832,101
	$X_1, X_2, X_4, X_7, X_9$	832,657
	$X_1, X_2, X_4, X_6, X_7$	833,634
4	$X_1, X_2, X_4, X_9$	835,454
	$X_2, X_4, X_6, X_9$	839,510
	$X_2, X_4, X_7, X_9$	840,299
3	$X_2, X_4, X_9$	842,694
	$X_2, X_4, X_6$	845,287
	$X_1, X_2, X_4$	852,191
2	$X_2, X_4$	855,363
	$X_4, X_9$	901,711
	$X_2, X_9$	906,784
1	$X_2$	943,719
	$X_9$	945,355
	$X_4$	947,658

<sup>\*)</sup> Nilai AIC terkecil

Terlihat pada Tabel 6.8 bahwa model MPR “terbaik” dengan nilai AIC terkecil (AIC=827,834), diperoleh untuk model dengan 6 variabel bebas, yaitu :  $X_1, X_2, X_4, X_6, X_7$ , dan  $X_9$ .

Untuk selanjutnya, model MPR “terbaik” yang telah diperoleh, ditentukan kembali nilai estimasi parameternya. Hasil estimasi parameter,

standar *error*, dan nilai statistik uji *Z* yang diperoleh berdasarkan perhitungan melalui program Matlab pada Lampiran 7, disajikan pada Tabel 6.9 dan Tabel 6.10.

Tabel 6.9 Estimasi Parameter dan Nilai Statistik Uji Parsial Model 1 ”terbaik”

Par	IBU			NEONATAL DINI			NEONATAL LANJUT		
	Est	Se	Z	Est	Se	Z	Est	Se	Z
$\beta_0$	-6,655	1,307	-5,093	-3,818	0,549	-6,954	-2,971	1,102	-2,696
$\beta_1$	0,009	0,016	0,542	0,012	0,006	1,862	-0,040	0,013	-3,005
$\beta_2$	-0,004	0,010	-0,335	-0,034	0,004	-7,766	0,001	0,010	0,118
$\beta_4$	0,035	0,034	1,034	0,082	0,014	5,915	0,072	0,029	2,532
$\beta_6$	-0,005	0,002	-2,916	0,001	0,001	1,016	-0,002	0,002	-1,184
$\beta_7$	-0,003	0,002	-1,601	0,001	0,001	1,128	0,003	0,001	2,412
$\beta_9$	-0,009	0,010	-0,957	0,013	0,004	3,096	-0,008	0,008	-0,979

Tabel 6.10 Estimasi Parameter dan Nilai Statistik Uji Parsial untuk Kovariansi Model 1”Terbaik”

Par	Est	Se	Z
$\lambda_0$	2,158	0,699	3,087

Model MPR “terbaik” untuk faktor-faktor yang mempengaruhi jumlah kematian ibu, neonatal dini, dan neonatal lanjut berdasarkan hasil estimasi parameter pada Tabel 6.9 dan Tabel 6.10 dapat dituliskan sebagai berikut:

$$\hat{\lambda}_{1i} + 2,158 = s_i \cdot \exp(-6,665 + 0,009X_{1i} - 0,004X_{2i} + 0,035X_{4i} - 0,005X_{6i} - 0,003X_{7i} - 0,009X_{9i})$$

$$\hat{\lambda}_{2i} + 2,158 = s_i \cdot \exp(-3,818 + 0,012X_{1i} - 0,034X_{2i} + 0,082X_{4i} + 0,001X_{6i} + 0,001X_{7i} + 0,013X_{9i})$$

$$\hat{\lambda}_{3i} + 2,158 = s_i \cdot \exp(-2,971 - 0,040X_{1i} + 0,001X_{2i} + 0,072X_{4i} - 0,002X_{6i} + 0,003X_{7i} - 0,008X_{9i})$$

Sementara itu, nilai statistik uji serentak model MPR “terbaik” yang diperoleh berdasarkan perhitungan dengan program Matlab pada Lampiran 7 adalah  $G_{1b} = 233,410$  yang lebih besar dari  $\chi^2_{0,05;18} = 28,870$ , sehingga  $H_0$  ditolak. Hal itu berarti paling sedikit ada satu variabel bebas yang berpengaruh signifikan terhadap variabel respon.

Hasil perhitungan estimasi parameter dan statistik uji Z pada Tabel 6.9 terlihat bahwa ada perbedaan variabel bebas yang berpengaruh signifikan untuk masing-masing variabel respon. Persentase ibu hamil yang mendapatkan tablet Fe3 ( $X_2$ ), persentase bayi dengan berat badan lahir rendah ( $X_4$ ), dan persentase perempuan yang menikah dibawah usia 17 tahun ( $X_9$ ), merupakan variabel bebas yang berpengaruh signifikan terhadap jumlah kematian neonatal dini. Persentase kunjungan ibu hamil K4 ( $X_1$ ), persentase bayi dengan berat badan lahir rendah ( $X_4$ ), dan rasio dokter umum per 100.000 penduduk ( $X_7$ ) yang berpengaruh signifikan terhadap jumlah kematian neonatal lanjut. Sedangkan variabel yang berpengaruh signifikan terhadap jumlah kematian ibu hanya rasio posyandu aktif per 100.000 penduduk ( $X_6$ ).

Pada model yang terbentuk, persentase bayi dengan berat badan lahir rendah memberikan kontribusi terbesar terhadap jumlah kematian neonatal dini dan neonatal lanjut, dimana setiap penambahan 1% bayi dengan berat badan lahir rendah menyebabkan pelipatgandaan rata-rata jumlah kematian neonatal dini dan neonatal lanjut berturut-turut sebesar  $\exp(0,082) = 1,086$  dan  $\exp(0,072) = 1,075$  dari rata-rata jumlah kematian semula. Sementara itu rasio posyandu aktif per 100.000 penduduk memberikan kontribusi yang cukup besar terhadap jumlah kematian ibu, dimana setiap penambahan 1 rasio posyandu aktif per 100.000 penduduk menyebabkan pelipatgandaan rata-rata jumlah kematian ibu sebesar  $\exp(-0,005) = 0,995$  dari rata-rata jumlah kematian semula.

### **6.2.2 Model MPR dengan Kovariansi Merupakan Fungsi Variabel Bebas (Model 2)**

Pemodelan jumlah kematian ibu, neonatal dini, dan neonatal lanjut untuk model MPR dengan kovariansi merupakan fungsi variabel bebas dimulai dengan mengestimasi parameter yang dilakukan menggunakan metode MLE dan penyelesaian secara iteratif dengan algoritma *Newton Raphson* sebagaimana disajikan pada persamaan (4.28). Hasil estimasi parameter, standar *error*, dan nilai statistik uji Z yang diperoleh berdasarkan perhitungan melalui program Matlab pada Lampiran 8, disajikan pada Tabel 6.11 dan Tabel 6.12.

Tabel 6.11 Estimasi Parameter dan Nilai Statistik Uji Parsial Model 2

Par	IBU			NEONATAL DINI			NEONATAL LANJUT		
	Est	Se	Z	Est	Se	Z	Est	Se	Z
$\beta_0$	-4,475	5,690	-0,787	-4,121	1,379	-2,989	-4,950	3,940	-1,256
$\beta_1$	-0,056	0,038	-1,462	0,006	0,008	0,766	-0,108	0,029	-3,700
$\beta_2$	0,037	0,026	1,418	-0,034	0,005	-6,429	0,032	0,020	1,593
$\beta_3$	0,023	0,042	0,553	0,017	0,010	1,641	0,063	0,035	1,815
$\beta_4$	-0,003	0,073	-0,045	0,086	0,018	4,898	0,069	0,055	1,237
$\beta_5$	-0,003	0,009	-0,313	0,002	0,002	0,982	0,011	0,008	1,466
$\beta_6$	-0,007	0,004	-1,726	0,001	0,001	0,521	-0,003	0,003	-0,958
$\beta_7$	-0,008	0,006	-1,366	0,001	0,001	0,955	0,005	0,003	1,717
$\beta_8$	-0,022	0,025	-0,873	-0,012	0,008	-1,552	-0,019	0,019	-0,989
$\beta_9$	0,012	0,020	0,624	0,016	0,005	3,016	0,014	0,014	0,972
$\beta_{10}$	-0,029	0,021	-1,371	0,001	0,006	0,193	-0,017	0,018	-0,971

Tabel 6.12 Estimasi Parameter dan Nilai Statistik Uji Parsial  
untuk Kovariansi Model 2

Par	Est	Se	Z
$\beta_0$	-5,771	16,004	-0,361
$\beta_1$	0,132	0,069	1,906
$\beta_2$	-0,101	0,039	-2,603
$\beta_3$	-0,151	0,075	-2,017
$\beta_4$	0,163	0,187	0,869
$\beta_5$	-0,028	0,025	-1,148

Par	Est	Se	Z
$\beta_6$	-0,007	0,015	-0,498
$\beta_7$	-0,008	0,008	-0,887
$\beta_8$	0,148	0,136	1,093
$\beta_9$	-0,184	0,103	-1,786
$\beta_{10}$	0,078	0,073	1,076

Pengujian parameter secara serentak pada model MPR dengan kovariansi merupakan fungsi variabel bebas yang dilakukan dengan metode LRT, yang diformulasikan sebagai berikut :

$$H_0 : \beta_{c1} = \beta_{c2} = \dots = \beta_{c10} = 0 \quad ; \quad c = 0,1,2,3$$

$$H_1 : \text{paling sedikit ada satu } \beta_{cl} \neq 0 \quad ; \quad c = 0,1,2,3 \quad ; \quad l = 1,2,\dots,10$$

Nilai statistik uji serentak yang diperoleh berdasarkan perhitungan dengan program Matlab pada Lampiran 8 adalah  $G_{2a} = 269,450$  yang lebih besar dari  $\chi^2_{0,05;40} = 55,76$ , sehingga  $H_0$  ditolak. Hal itu berarti paling sedikit ada satu variabel bebas yang berpengaruh signifikan terhadap variabel respon.

Untuk mengetahui variabel bebas mana yang berpengaruh signifikan terhadap variabel respon, dilakukan pengujian parameter secara parsial. Untuk menguji secara parsial parameter  $\beta_{cl} (c = 0, 1, 2, 3 ; l = 1, 2, \dots, 10)$  diformulasikan sebagai berikut :

$$H_0 : \beta_{cl} = 0$$

$$H_1 : \beta_{cl} \neq 0$$

Hasil perhitungan estimasi parameter dan statistik uji  $Z$  pada Tabel 6.11 terlihat bahwa beberapa variabel bebas mempunyai nilai  $|Z| > Z_{0,025} = 1,96$  yang menunjukkan variabel tersebut berpengaruh signifikan terhadap variabel respon. Variabel tersebut adalah  $X_2, X_4$  dan  $X_9$  terhadap  $Y_2$ , yang kedua  $X_1$  terhadap  $Y_3$ , sedangkan untuk  $Y_1$  tidak ada variabel bebas yang berpengaruh signifikan. Sementara itu variabel bebas yang berpengaruh signifikan terhadap kovariansi adalah  $X_2$  dan  $X_3$ .

Untuk selanjutnya dilakukan pemilihan model MPR “terbaik”, sehingga model yang terbentuk memuat variabel bebas yang minimal tetapi memberikan kontribusi yang optimal terhadap variabel respon. Sebagaimana pada model MPR dengan kovariansi merupakan konstanta, pada model ini pemilihan model MPR “terbaik” juga digunakan metode *Best Subsets Regression* dengan mempertimbangkan nilai *Akaike's Information Criterion* (AIC). Tiga nilai AIC terkecil untuk semua kombinasi variabel bebas yang diperoleh berdasarkan perhitungan dengan program Matlab pada Lampiran 8, disajikan dalam Tabel 6.13.



Tabel 6.13 Nilai AIC Tiga Terkecil untuk Kombinasi Variabel Bebas Model 2

Banyak Var Bebas	Variabel Bebas dalam Model	AIC
10	$X_1, X_2, X_3, X_4, X_5, X_6, X_7, X_8, X_9, X_{10}$	840,130
9	$X_1, X_2, X_3, X_4, X_5, X_6, X_7, X_9, X_{10}$	832,559
	$X_1, X_2, X_3, X_4, X_6, X_7, X_8, X_9, X_{10}$	836,883
	$X_1, X_2, X_3, X_4, X_5, X_7, X_8, X_9, X_{10}$	843,557
8	$X_1, X_2, X_4, X_5, X_6, X_7, X_8, X_9$	819,743
	$X_1, X_2, X_3, X_4, X_5, X_6, X_7, X_9$	826,430
	$X_1, X_2, X_3, X_4, X_5, X_6, X_8, X_9$	827,397
7	$X_1, X_2, X_4, X_6, X_7, X_8, X_9$	816,678
	$X_1, X_2, X_4, X_5, X_6, X_8, X_9$	823,644
	$X_1, X_2, X_3, X_4, X_5, X_6, X_9$	825,840
6	$X_1, X_2, X_4, X_6, X_7, X_9$	810,968 <sup>*)</sup>
	$X_1, X_2, X_3, X_4, X_6, X_9$	826,046
	$X_1, X_2, X_3, X_4, X_7, X_9$	826,742
5	$X_1, X_2, X_4, X_6, X_9$	821,631
	$X_1, X_2, X_4, X_6, X_7$	824,706
	$X_1, X_2, X_4, X_7, X_9$	831,346
4	$X_1, X_2, X_4, X_6$	831,230
	$X_1, X_2, X_4, X_7$	844,210
	$X_2, X_4, X_7, X_9$	844,603
3	$X_2, X_4, X_9$	847,562
	$X_2, X_4, X_6$	851,331
	$X_1, X_2, X_4$	857,807
2	$X_2, X_4$	862,529
	$X_4, X_9$	906,148
	$X_2, X_9$	910,014
1	$X_9$	947,876
	$X_2$	948,595
	$X_4$	954,806

\*) Nilai AIC terkecil

Terlihat pada Tabel 6.13 bahwa model MPR “terbaik” dengan nilai AIC terkecil (AIC=810,968), diperoleh untuk model dengan 6 variabel bebas yang sama seperti pada model MPR dengan kovariansi suatu konstanta, yaitu  $X_1$ ,  $X_2$ ,  $X_4$ ,  $X_6$ ,  $X_7$ , dan  $X_9$ .

Untuk selanjutnya, model MPR “terbaik” yang telah diperoleh, ditentukan kembali nilai estimasi parameternya. Hasil estimasi parameter, standar *error*, dan nilai statistik uji Z yang diperoleh berdasarkan perhitungan melalui program Matlab pada Lampiran 8, disajikan pada Tabel 6.14 dan Tabel 6.15.

Tabel 6.14 Estimasi Parameter dan Nilai Statistik Uji Parsial Model 2

Par	IBU			NEONATAL DINI			NEONATAL LANJUT		
	Est	Se	Z	Est	Se	Z	Est	Se	Z
$\beta_0$	-8,325	1,574	-5,289	-4,099	0,567	-7,232	-4,057	1,221	-3,322
$\beta_1$	0,031	0,019	1,643	0,016	0,007	2,400	-0,023	0,015	-1,588
$\beta_2$	-0,009	0,011	-0,762	-0,035	0,004	-7,968	-0,005	0,010	-0,454
$\beta_4$	0,028	0,037	0,744	0,080	0,014	5,680	0,069	0,030	2,310
$\beta_6$	-0,003	0,002	-1,524	0,001	0,001	1,467	-0,001	0,002	-0,299
$\beta_7$	-0,009	0,003	-2,933	0,000	0,001	-0,056	0,001	0,002	0,459
$\beta_9$	-0,008	0,012	-0,634	0,013	0,004	3,108	-0,007	0,009	-0,719

Tabel 6.15 Estimasi Parameter dan Nilai Statistik Uji Parsial untuk Kovariansi Model 2

Par	Est	Se	Z
$\beta_0$	222,843	455,835	0,489
$\beta_1$	-6,251	12,503	-0,500
$\beta_2$	4,173	8,522	0,490
$\beta_4$	9,117	17,607	0,518

Par	Est	Se	Z
$\beta_6$	-0,816	1,647	-0,495
$\beta_7$	0,317	0,567	0,559
$\beta_9$	-2,124	4,417	-0,481

Model MPR “terbaik” untuk faktor yang mempengaruhi kematian ibu, neonatal dini, dan neonatal lanjut berdasarkan hasil estimasi parameter pada Tabel 6.14 dan Tabel 6.15 dapat dituliskan sebagai berikut:

$$\hat{E}[Y_{1i}] = s_i \cdot \exp(-8,325 + 0,031X_{1i} - 0,009X_{2i} + 0,028X_{4i} - 0,003X_{6i} - 0,009X_{7i} - 0,008X_{9i}) + K_{1i}$$

$$\hat{E}[Y_{2i}] = s_i \cdot \exp(-4,099 + 0,016X_{1i} - 0,035X_{2i} + 0,080X_{4i} + 0,001X_{6i} + 0,000X_{7i} + 0,013X_{9i}) + K_{1i}$$

$$\hat{E}[Y_{3i}] = s_i \cdot \exp(-4,057 - 0,023X_{1i} - 0,005X_{2i} + 0,069X_{4i} - 0,001X_{6i} + 0,001X_{7i} - 0,007X_{9i}) + K_{1i}$$

dimana

$$K_{1i} = s_i \cdot \exp(222,843 - 6,251X_{1i} + 4,173X_{2i} + 9,117X_{4i} - 0,816X_{6i} + 0,317X_{7i} - 2,124X_{9i})$$

Sementara itu, nilai statistik uji serentak model MPR “terbaik” yang diperoleh berdasarkan perhitungan dengan program Matlab pada Lampiran 8 adalah  $G_{2b} = 266,612$  yang lebih besar dari  $\chi^2_{0,05;24} = 36,420$ , sehingga  $H_0$  ditolak. Hal itu berarti paling sedikit ada satu variabel bebas yang berpengaruh signifikan terhadap variabel respon.

Untuk mengetahui variabel bebas mana yang berpengaruh signifikan terhadap variabel respon, dilakukan pengujian parameter secara parsial. Hasil perhitungan estimasi parameter dan  $Z$  pada Tabel 6.14 terlihat bahwa ada perbedaan variabel bebas yang berpengaruh signifikan untuk masing-masing variabel respon. Persentase kunjungan ibu hamil K4 ( $X_1$ ), persentase ibu hamil yang mendapatkan tablet Fe3 ( $X_2$ ), persentase bayi dengan berat badan lahir rendah ( $X_4$ ), dan persentase perempuan yang menikah di bawah usia 17 tahun ( $X_9$ ) berpengaruh signifikan terhadap jumlah kematian neonatal dini. Sedangkan variabel yang berpengaruh signifikan terhadap kematian ibu dan neonatal lanjut berturut-turut adalah rasio dokter umum per 100.000 penduduk ( $X_7$ ) dan persentase bayi dengan berat badan lahir rendah ( $X_4$ ).

### **6.3 Pemodelan Jumlah Kematian Ibu, Neonatal Dini dan Neonatal Lanjut dengan GWMPR**

Model GWMPR merupakan salah satu teknik statistika yang bersifat lokal karena adanya keberagaman dalam hubungan secara kewilayahan yang disebut heterogenitas spasial. Untuk mengetahui adanya heterogenitas spasial dapat dilakukan dengan uji kesamaan matriks variansi-kovariansi untuk masing-masing data amatan atau lokasi. Hasil pengujian heterogenitas spasial pada data jumlah kematian ibu, neonatal dini, dan neonatal lanjut dengan uji *Glejser* sebagaimana disajikan pada Lampiran 11, diperoleh nilai statistik uji  $G = 47,210$  yang lebih besar dari  $\chi^2_{(0,05;30)} = 43,77$ , sehingga  $H_0$  ditolak. Hal tersebut berarti ada heterogenitas spasial pada data jumlah kematian ibu, neonatal dini, dan neonatal lanjut.

Untuk selanjutnya pemodelan jumlah kematian ibu, neonatal dini, dan neonatal lanjut dengan GWMPR dilakukan dengan memanfaatkan variabel-

variabel pada model MPR “terbaik” baik untuk kovariansi merupakan konstanta dan kovariansi merupakan fungsi variabel bebas.

### 6.3.1 Model GWMPR dengan Kovariansi Merupakan Konstanta (Model 3)

Pemodelan jumlah kematian ibu, neonatal dini, dan neonatal lanjut dimulai dengan mengestimasi parameter model GWMPR yang dilakukan menggunakan metode MLE dan penyelesaian secara iteratif dengan algoritma *Newton Raphson* sebagaimana disajikan pada persamaan (5.14). Nilai *bandwidth* optimum untuk fungsi pembobot *adaptif kernel gaussian* yang diperoleh berdasarkan nilai *generalized cross-validation* (GCV) minimum, disajikan pada Lampiran 12. Sedangkan hasil estimasi parameter, standar *error*, dan nilai statistik uji Z untuk setiap lokasi disajikan pada Lampiran 13 dan Lampiran 14.

Untuk selanjutnya dilakukan pengujian hipotesis model GWMPR yang dimulai dengan uji kesamaan model GWMPR dengan model MPR. Dalam penelitian ini uji kesamaan kedua model digunakan *Young's test*, dengan formulasi hipotesis sebagai berikut:

$$H_0 : \beta_{hl}(\mathbf{u}_i) = \beta_{hl}$$

$$H_1 : \text{paling sedikit ada satu } \beta_{hl}(\mathbf{u}_i) \neq \beta_{hl} ; h = 1, 2, 3 ; l = 0, 1, 2, 4, 6, 7, 9 ; i = 1, 2, \dots, 35$$

Nilai statistik uji yang diperoleh berdasarkan perhitungan pada Lampiran 15 adalah  $G_{13} = -5,403$  yang nilai mutlaknya lebih besar dari  $Z_{0,025} = 1,96$ , sehingga  $H_0$  ditolak. Hal itu berarti terdapat perbedaan antara model GWMPR dengan MPR untuk kovariansi merupakan konstanta.

Pengujian kedua model GWMPR dengan kovariansi merupakan konstanta adalah uji serentak, yang diformulasikan sebagai berikut :

$$H_0 : \beta_{hl}(\mathbf{u}_i) = 0$$

$$H_1 : \text{paling sedikit ada satu } \beta_{hl}(\mathbf{u}_i) \neq 0 ; h = 1, 2, 3 ; l = 1, 2, 4, 6, 7, 9 ; i = 1, 2, \dots, 35$$

Nilai statistik uji serentak model GWMPR yang diperoleh berdasarkan perhitungan dengan program Matlab pada Lampiran 9 adalah  $G_{3b} = 256,322$  yang lebih besar dari  $\chi^2_{0,05;40,438} = 56,280$ , sehingga  $H_0$  ditolak. Hal itu berarti paling sedikit ada satu variabel bebas yang berpengaruh signifikan terhadap variabel respon.

Untuk mengetahui variabel bebas mana yang berpengaruh signifikan terhadap variabel respon untuk masing-masing lokasi, dilakukan pengujian parameter secara parsial. Pada bab ini disajikan contoh hasil analisis data untuk dua lokasi yang mewakili wilayah barat dan timur Provinsi Jawa Tengah, yaitu Kabupaten Banyumas (07°26' LS dan 109° 14' BT) dan Kabupaten Sragen (07°25' LS dan 111° 01' BT). Hasil estimasi parameter, standar *error*, dan nilai statistik uji Z untuk kedua lokasi, yang diperoleh berdasarkan perhitungan melalui program Matlab pada Lampiran 9, disajikan pada Tabel 6.16 s.d. Tabel 6.18.

Tabel 6.16 Estimasi Parameter dan Nilai Statistik Uji Parsial Model 3  
Kabupaten Banyumas

Par	IBU			NEONATAL DINI			NEONATAL LANJUT		
	Est	Se	Z	Est	Se	Z	Est	Se	Z
$\beta_0$	-9,074	2,104	-4,312	-4,619	0,901	-5,129	-6,382	1,892	-3,373
$\beta_1$	0,031	0,026	1,165	0,016	0,011	1,461	-0,017	0,024	-0,710
$\beta_2$	-0,005	0,022	-0,230	-0,032	0,009	-3,454	0,023	0,024	0,952
$\beta_4$	0,035	0,063	0,555	0,060	0,026	2,356	0,129	0,055	2,344
$\beta_6$	-0,003	0,003	-1,186	0,003	0,001	2,037	-0,005	0,002	-2,092
$\beta_7$	-0,001	0,005	-0,273	0,003	0,002	1,538	-0,001	0,004	-0,217
$\beta_9$	0,007	0,015	0,480	0,020	0,007	3,047	-0,033	0,013	-2,472

Tabel 6.17 Estimasi Parameter dan Nilai Statistik Uji Parsial Model 3  
Kabupaten Sragen

Par	IBU			NEONATAL DINI			NEONATAL LANJUT		
	Est	Se	Z	Est	Se	Z	Est	Se	Z
$\beta_0$	-3,990	3,603	-1,107	-0,142	1,466	-0,097	1,739	2,684	0,648
$\beta_1$	-0,017	0,046	-0,378	-0,014	0,018	-0,782	-0,082	0,033	-2,466
$\beta_2$	-0,001	0,024	-0,024	-0,038	0,009	-4,145	-0,008	0,020	-0,397
$\beta_4$	0,045	0,078	0,569	0,112	0,031	3,614	0,036	0,065	0,558
$\beta_6$	-0,007	0,005	-1,613	-0,004	0,002	-1,985	-0,002	0,004	-0,566
$\beta_7$	-0,005	0,003	-1,652	-0,002	0,002	-1,411	0,004	0,002	1,825
$\beta_9$	-0,028	0,021	-1,324	-0,012	0,009	-1,289	0,000	0,017	0,011

Tabel 6.18 Estimasi Parameter dan Nilai Statistik Uji Parsial  
untuk Kovariansi Model 3

Kabupaten/Kota	Est	Se	Z
Banyumas	-3,855	4,465	-0,864
Sragen	1,718	1,000	1,718

Model GWMPR untuk faktor yang mempengaruhi jumlah kematian ibu, neonatal dini, dan neonatal lanjut untuk Kabupaten Banyumas berdasarkan hasil estimasi parameter pada Tabel 6.16 dan Tabel 6.18 dapat dituliskan sebagai berikut:

$$\hat{\lambda}_{1i} - 3,855 = s_i \cdot \exp(-9,074 + 0,031X_{1i} - 0,005X_{2i} + 0,035X_{4i} - 0,003X_{6i} - 0,001X_{7i} + 0,007X_{9i})$$

$$\hat{\lambda}_{2i} - 3,855 = s_i \cdot \exp(-4,619 + 0,016X_{1i} - 0,032X_{2i} + 0,060X_{4i} + 0,003X_{6i} + 0,003X_{7i} + 0,020X_{9i})$$

$$\hat{\lambda}_{3i} - 3,855 = s_i \cdot \exp(-6,382 - 0,017X_{1i} + 0,023X_{2i} + 0,129X_{4i} - 0,005X_{6i} - 0,001X_{7i} - 0,033X_{9i})$$

Sedangkan untuk Kabupaten Sragen, berdasarkan hasil estimasi parameter pada Tabel 6.17 dan Tabel 6.18 diperoleh model GWMPR untuk faktor yang mempengaruhi kematian ibu, neonatal dini dan neonatal lanjut adalah :

$$\hat{\lambda}_{1i} + 1,718 = s_i \cdot \exp(-3,990 - 0,017X_{1i} - 0,001X_{2i} + 0,045X_{4i} - 0,007X_{6i} - 0,005X_{7i} - 0,028X_{9i})$$

$$\hat{\lambda}_{2i} + 1,718 = s_i \cdot \exp(-0,142 - 0,014X_{1i} - 0,038X_{2i} + 0,112X_{4i} - 0,004X_{6i} - 0,002X_{7i} - 0,012X_{9i})$$

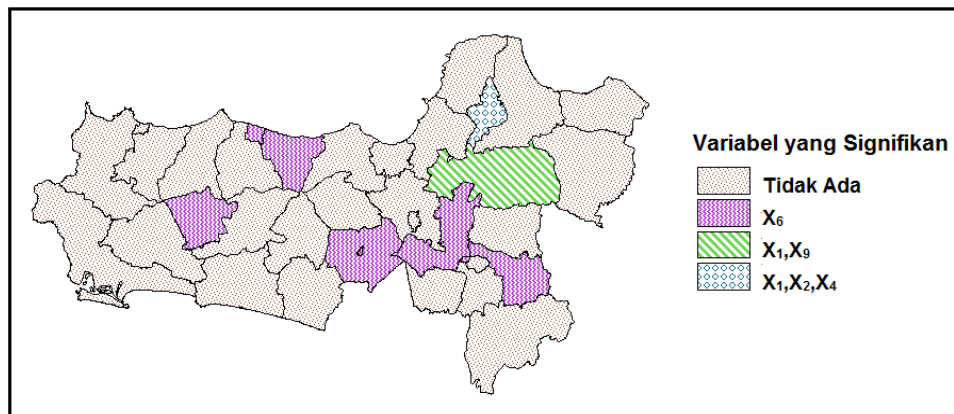
$$\hat{\lambda}_{3i} + 1,718 = s_i \cdot \exp(1,739 - 0,082X_{1i} - 0,008X_{2i} + 0,036X_{4i} - 0,002X_{6i} + 0,004X_{7i} + 0,000X_{9i})$$

Hasil uji parsial yang disajikan pada Tabel 6.16 s.d. Tabel 6.18, terlihat adanya perbedaan variabel bebas yang berpengaruh signifikan antara Kabupaten Banyumas dan Kabupaten Sragen. Untuk jumlah kematian ibu, tidak ada variabel bebas yang berpengaruh signifikan, baik di Kabupaten Banyumas maupun Kabupaten Sragen. Di Kabupaten Banyumas, persentase ibu hamil mendapatkan tablet Fe3 ( $X_2$ ), persentase bayi dengan berat badan lahir rendah ( $X_4$ ), rasio posyandu aktif per 100.000 penduduk ( $X_6$ ), dan persentase perempuan yang menikah dibawah usia 17 tahun ( $X_9$ ) berpengaruh signifikan terhadap jumlah kematian neonatal dini. Sedangkan di Kabupaten Sragen hanya persentase ibu hamil mendapatkan tablet Fe3 ( $X_2$ ) dan persentase bayi dengan berat badan lahir

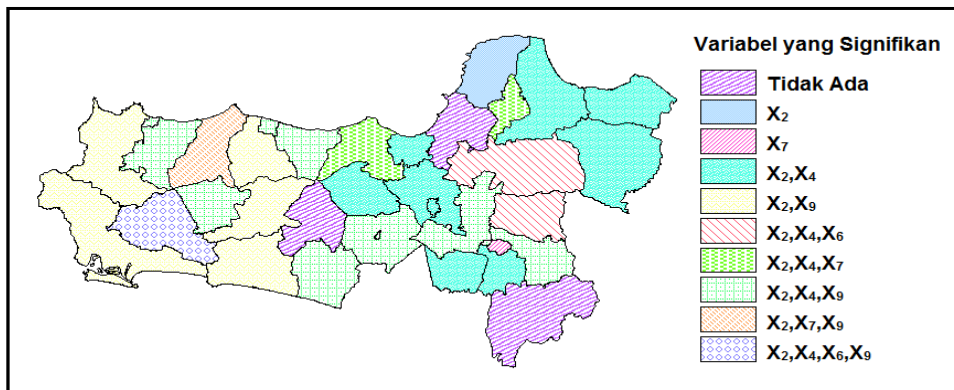
rendah ( $X_4$ ) yang berpengaruh signifikan terhadap jumlah kematian neonatal dini. Untuk jumlah kematian neonatal lanjut, variabel bebas yang berpengaruh signifikan di Kabupaten Banyumas adalah persentase bayi dengan berat badan lahir rendah ( $X_4$ ), rasio posyandu aktif per 100.000 penduduk ( $X_6$ ), dan persentase perempuan yang menikah dibawah usia 17 tahun ( $X_9$ ). Sedangkan di Kabupaten Sragen, hanya persentase kunjungan ibu hamil K4 ( $X_1$ ) saja yang berpengaruh signifikan terhadap jumlah kematian neonatal lanjut.

Pada model yang terbentuk, persentase bayi dengan berat badan lahir rendah memberikan kontribusi terbesar dalam jumlah kematian neonatal dini baik untuk Kabupaten Banyumas maupun Sragen, dimana setiap penambahan 1% bayi dengan berat badan lahir rendah menyebabkan pelipatgandaan rata-rata jumlah kematian neonatal dini berturut-turut sebesar  $\exp(0,060)=1,062$  dan  $\exp(0,112)=1,119$  dari rata-rata jumlah kematian semula. Variabel bebas yang memberikan kontribusi terbesar untuk jumlah kematian neonatal lanjut adalah persentase bayi dengan berat badan lahir rendah untuk Kabupaten Banyumas dimana setiap penambahan 1% bayi dengan berat badan lahir rendah menyebabkan pelipatgandaan rata-rata jumlah kematian neonatal lanjut sebesar  $\exp(0,129)=1,138$ , sedangkan untuk Kabupaten Sragen adalah persentase kunjungan ibu hamil K4 dimana setiap penambahan 1% persentase kunjungan ibu hamil K4 menyebabkan pelipatgandaan rata-rata jumlah kematian neonatal lanjut sebesar  $\exp(-0,082)=0,921$ .

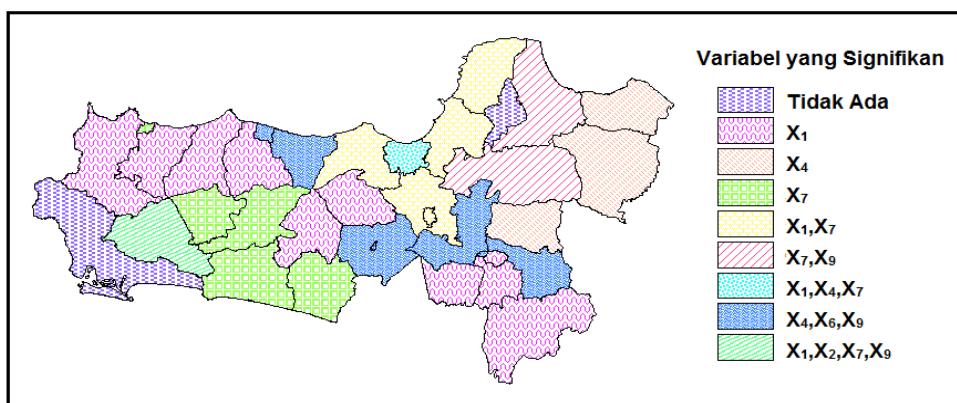
Secara umum, berdasarkan hasil perhitungan estimasi parameter dan statistik uji Z untuk setiap lokasi yang disajikan pada Lampiran 13 dan Lampiran 14, ternyata terdapat perbedaan parameter yang signifikan mempengaruhi jumlah kematian ibu, neonatal dini, dan neonatal lanjut di Provinsi Jawa Tengah. Perbedaan karakter variabel yang signifikan mempengaruhi jumlah kematian ibu, neonatal dini, dan neonatal lanjut untuk masing-masing kabupaten/kota disajikan pada Gambar 6.1 s.d. Gambar 6.3.



Gambar 6.1 Variabel Bebas yang Berpengaruh Signifikan Terhadap Jumlah Kematian Ibu Pada Model 3



Gambar 6.2 Variabel Bebas yang Berpengaruh Signifikan Terhadap Jumlah Kematian Neonatal Dini Pada Model 3



Gambar 6.3 Variabel Bebas yang Berpengaruh Signifikan Terhadap Jumlah Kematian Neonatal Lanjut Pada Model 3



Terlihat pada Gambar 6.1 s.d. Gambar 6.3, bahwa terdapat perbedaan parameter yang signifikan mempengaruhi jumlah kematian ibu, neonatal dini, dan neonatal lanjut untuk masing-masing kabupaten/kota. Variabel bebas yang paling banyak berpengaruh signifikan terhadap jumlah kematian ibu adalah rasio posyandu aktif per 100.000 penduduk yang terjadi pada 8 kabupaten/kota. Untuk jumlah kematian neonatal dini, persentase ibu hamil yang mendapatkan tablet Fe3 dan persentase bayi dengan berat badan lahir rendah merupakan variabel bebas yang paling dominan berpengaruh, berturut-turut terjadi pada 31 dan 24 kabupaten/kota. Sedangkan rasio dokter umum per 100.000 penduduk, persentase bayi dengan berat badan lahir rendah dan persentase kunjungan ibu hamil K4 paling banyak berpengaruh signifikan terhadap jumlah kematian neonatal lanjut yang terjadi berturut-turut pada 15, 13 dan 12 kabupaten/kota.

### 6.3.2 Model GWMPR dengan Kovariansi Merupakan Fungsi Variabel Bebas (Model 4)

Sebagaimana pada model GWMPR dengan kovariansi merupakan konstanta, pemodelan jumlah kematian ibu, neonatal dini, dan neonatal lanjut untuk model MPR dengan kovariansi merupakan fungsi variabel bebas dimulai dengan mengestimasi parameter yang dilakukan menggunakan metode MLE dan penyelesaian secara iteratif dengan algoritma *Newton Raphson* sebagaimana disajikan pada persamaan (5.30). Nilai *bandwidth* optimum untuk fungsi pembobot *adaptif kernel gaussian* yang diperoleh berdasarkan nilai *generalized cross-validation* (GCV) minimum, disajikan pada Lampiran 12. Sedangkan hasil estimasi parameter, standar *error*, dan nilai statistik uji Z untuk setiap lokasi disajikan pada Lampiran 16 dan Lampiran 17.

Untuk selanjutnya dilakukan pengujian hipotesis model GWMPR yang dimulai dengan uji kesamaan model GWMPR dengan model MPR. Dalam penelitian ini, uji kesamaan kedua model digunakan *Young's test*, dengan formulasi hipotesis sebagai berikut:

$$H_0 : \beta_{cl}(\mathbf{u}_i) = \beta_{cl}$$

$$H_1 : \text{paling sedikit ada satu } \beta_{cl}(\mathbf{u}_i) \neq \beta_{cl} ; c = 0,1,2,3 ; l = 0,1,2,4,6,7,9 ; i = 1,2,...,35$$

Nilai statistik uji yang diperoleh berdasarkan perhitungan pada Lampiran 18 adalah  $G_{24} = -5,905$  yang nilai mutlaknya lebih besar dari  $Z_{0,025} = 1,96$ , sehingga  $H_0$  ditolak. Hal itu berarti terdapat perbedaan antara model MPR dengan GWMPR untuk kovariansi merupakan fungsi variabel bebas.

Pengujian kedua model GWMPR dengan kovariansi merupakan fungsi variabel bebas adalah uji serentak dengan formulasi hipotesis sebagai berikut :

$$H_0 : \beta_{cl}(\mathbf{u}_i) = 0$$

$$H_1 : \text{paling sedikit ada satu } \beta_{cl}(\mathbf{u}_i) \neq 0 ; c = 0,1,2,3 ; l = 1,2,4,6,7,9 ; i = 1,2,\dots,35$$

Nilai statistik uji serentak model GWMPR yang diperoleh berdasarkan perhitungan dengan program Matlab pada Lampiran 10 adalah  $G_{4b} = 322,333$  yang lebih besar dari  $\chi^2_{0,05;48,92} = 66,250$  sehingga  $H_0$  ditolak. Hal itu berarti paling sedikit ada satu variabel bebas yang berpengaruh signifikan terhadap variabel respon.

Untuk mengetahui variabel bebas mana yang berpengaruh signifikan terhadap variabel respon, dilakukan pengujian parameter secara parsial. Sebagaimana pada model GWMPR untuk kovariansi merupakan konstanta, pada bab ini disajikan contoh hasil analisis data untuk Kabupaten Banyumas dan Kabupaten Sragen. Hasil estimasi parameter, standar *error*, dan nilai statistik uji  $Z$  untuk kedua lokasi, yang diperoleh berdasarkan perhitungan melalui program Matlab pada Lampiran 10, disajikan pada Tabel 6.19 s.d. Tabel 6.22.

Tabel 6.19 Estimasi Parameter dan Nilai Statistik Uji Parsial Model 4

Kabupaten Banyumas

Par	IBU			NEONATAL DINI			NEONATAL LANJUT		
	Est	Se	Z	Est	Se	Z	Est	Se	Z
$\beta_0$	-27,48	10,135	-2,712	-6,237	0,922	-6,765	-15,92	4,044	-3,936
$\beta_1$	0,148	0,076	1,939	0,026	0,011	2,408	-0,001	0,036	-0,039
$\beta_2$	0,044	0,048	0,904	-0,029	0,009	-3,352	0,093	0,053	1,772
$\beta_4$	-0,091	0,162	-0,559	0,053	0,025	2,125	0,103	0,073	1,400
$\beta_6$	0,002	0,006	0,300	0,004	0,001	2,741	-0,002	0,004	-0,549
$\beta_7$	0,004	0,011	0,341	0,003	0,002	1,711	0,002	0,005	0,460
$\beta_9$	0,120	0,074	1,626	0,032	0,007	4,413	0,015	0,023	0,650

Tabel 6.20 Estimasi Parameter dan Nilai Statistik Uji Parsial  
untuk Kovariansi Model 4 di Kabupaten Banyumas

Par	Est	Se	Z	Par	Est	Se	Z
$\beta_0$	11,310	8,057	1,404	$\beta_6$	-0,016	0,010	-1,633
$\beta_1$	-0,090	0,058	-1,547	$\beta_7$	0,000	0,010	-0,012
$\beta_2$	-0,084	0,047	-1,803	$\beta_9$	-0,134	0,054	-2,462
$\beta_4$	0,247	0,160	1,542				

Tabel 6.21 Estimasi Parameter dan Nilai Statistik Uji Parsial Model 4  
Kabupaten Sragen

Par	IBU			NEONATAL DINI			NEONATAL LANJUT		
	Est	Se	Z	Est	Se	Z	Est	Se	Z
$\beta_0$	-6,454	3,544	-1,821	-1,629	1,113	-1,463	-1,400	2,303	-0,608
$\beta_1$	0,010	0,042	0,235	-0,004	0,013	-0,335	-0,055	0,027	-2,006
$\beta_2$	-0,001	0,019	-0,028	-0,035	0,007	-5,052	-0,006	0,016	-0,348
$\beta_4$	0,004	0,071	0,053	0,102	0,024	4,232	0,016	0,054	0,291
$\beta_6$	-0,004	0,005	-0,833	-0,002	0,002	-1,288	0,001	0,004	0,368
$\beta_7$	-0,013	0,005	-2,514	-0,002	0,001	-1,589	0,002	0,003	0,877
$\beta_9$	-0,032	0,027	-1,192	-0,004	0,008	-0,510	0,006	0,017	0,368

Tabel 6.22 Estimasi Parameter dan Nilai Statistik Uji Parsial  
untuk Kovariansi Model 4 di Kabupaten Sragen

Par	Est	Se	Z	Par	Est	Se	Z
$\beta_0$	31,091	31,304	0,993	$\beta_6$	-0.113	0.097	-1.168
$\beta_1$	-0,296	0,241	-1,232	$\beta_7$	0.070	0.088	0.796
$\beta_2$	-0,114	0,196	-0,583	$\beta_9$	-0.041	0.151	-0.274
$\beta_4$	0,838	0,687	1,220				

Model GWMPR untuk faktor yang mempengaruhi jumlah kematian ibu, neonatal dini, dan neonatal lanjut untuk Kabupaten Banyumas berdasarkan hasil estimasi parameter pada Tabel 6.19 dan Tabel 6.20 dapat dituliskan sebagai berikut:

$$\hat{E}[Y_{1i}] = s_i \cdot \exp(-27,484 + 0,148X_{1i} + 0,044X_{2i} - 0,091X_{4i} + 0,002X_{6i} + 0,004X_{7i} + 0,120X_{9i}) + K_{2i}$$

$$\hat{E}[Y_{2i}] = s_i \cdot \exp(-6,237 + 0,026X_{1i} - 0,029X_{2i} + 0,053X_{4i} + 0,004X_{6i} + 0,003X_{7i} + 0,032X_{9i}) + K_{2i}$$

$$\hat{E}[Y_{3i}] = s_i \cdot \exp(-15,915 - 0,001X_{1i} + 0,093X_{2i} + 0,103X_{4i} - 0,002X_{6i} + 0,002X_{7i} + 0,015X_{9i}) + K_{2i}$$

dimana

$$K_{2i} = s_i \cdot \exp(11,310 - 0,090X_{1i} - 0,084X_{2i} + 0,247X_{4i} - 0,016X_{6i} + 0,000X_{7i} - 0,134X_{9i})$$

Sedangkan di Kabupaten Sragen, berdasarkan hasil estimasi parameter pada Tabel 6.21 dan Tabel 6.22 diperoleh model GWMPR untuk faktor yang mempengaruhi jumlah kematian ibu, neonatal dini, dan neonatal lanjut adalah :

$$\hat{E}[Y_{1i}] = s_i \cdot \exp(-6,454 + 0,010X_{1i} - 0,001X_{2i} + 0,004X_{4i} - 0,004X_{6i} - 0,013X_{7i} - 0,032X_{9i}) + K_{3i}$$

$$\hat{E}[Y_{2i}] = s_i \cdot \exp(-1,629 - 0,004X_{1i} - 0,035X_{2i} + 0,102X_{4i} - 0,002X_{6i} - 0,002X_{7i} - 0,004X_{9i}) + K_{3i}$$

$$\hat{E}[Y_{3i}] = s_i \cdot \exp(-1,400 - 0,055X_{1i} - 0,006X_{2i} + 0,016X_{4i} + 0,001X_{6i} + 0,002X_{7i} + 0,006X_{9i}) + K_{3i}$$

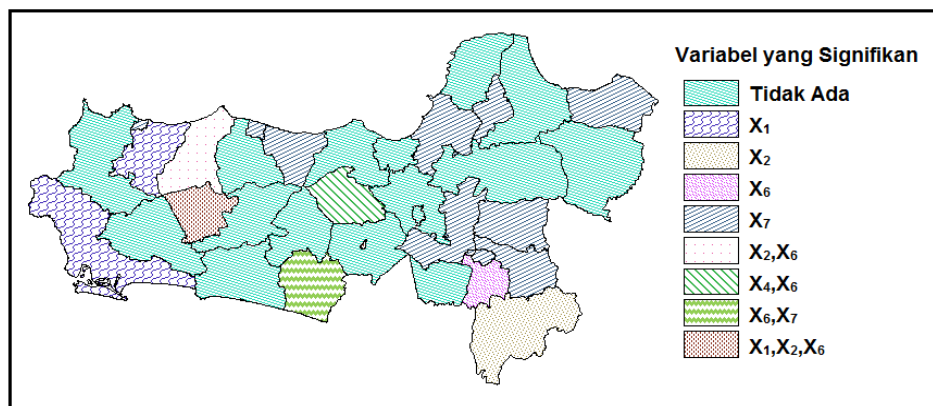
dimana

$$K_{3i} = s_i \cdot \exp(31,091 - 0,296X_{1i} - 0,114X_{2i} + 0,838X_{4i} - 0,113X_{6i} + 0,070X_{7i} - 0,041X_{9i})$$

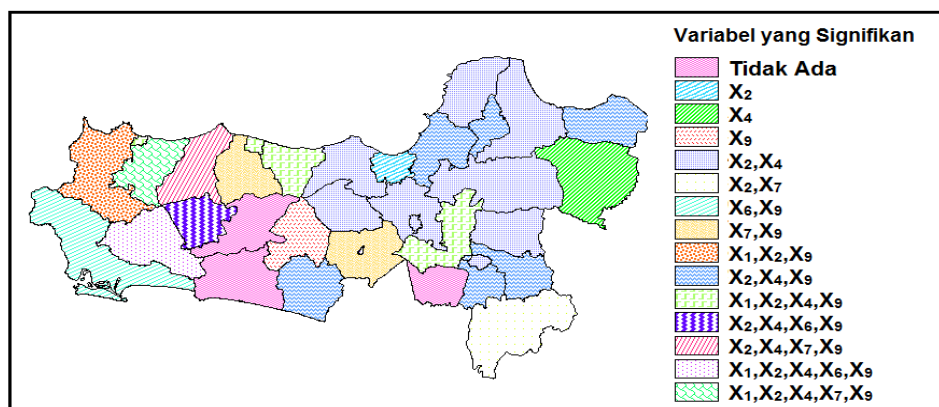
Hasil uji parsial yang disajikan pada Tabel 6.19 s.d Tabel 6.22, terlihat adanya perbedaan variabel bebas yang berpengaruh signifikan antara Kabupaten Banyumas dan Sragen. Di Kabupaten Sragen, variabel bebas yang berpengaruh signifikan terhadap jumlah kematian ibu hanya rasio dokter umum per 100.000 penduduk ( $X_7$ ). Sedangkan di Kabupaten Banyumas, tidak ada variabel bebas yang berpengaruh signifikan terhadap jumlah kematian ibu. Untuk jumlah kematian neonatal dini, variabel bebas yang berpengaruh signifikan di Kabupaten Banyumas adalah persentase kunjungan ibu hamil K4 ( $X_1$ ), persentase ibu hamil mendapatkan tablet Fe3 ( $X_2$ ), persentase bayi dengan berat badan lahir rendah ( $X_4$ ), rasio posyandu aktif per 100.000 penduduk ( $X_6$ ), dan persentase perempuan yang menikah dibawah usia 17 tahun ( $X_9$ ). Sedangkan di Kabupaten Sragen hanya persentase ibu hamil mendapatkan tablet Fe3 ( $X_2$ ) dan persentase bayi dengan berat badan lahir rendah ( $X_4$ ) yang berpengaruh signifikan terhadap jumlah kematian neonatal dini. Sementara itu untuk jumlah kematian neonatal lanjut, hanya ada satu variabel bebas yang berpengaruh signifikan di Kabupaten Sragen, yaitu persentase kunjungan ibu hamil K4 ( $X_1$ ). Sedangkan di Kabupaten

Banyumas, tidak ada variabel bebas yang berpengaruh signifikan terhadap jumlah kematian neonatal lanjut.

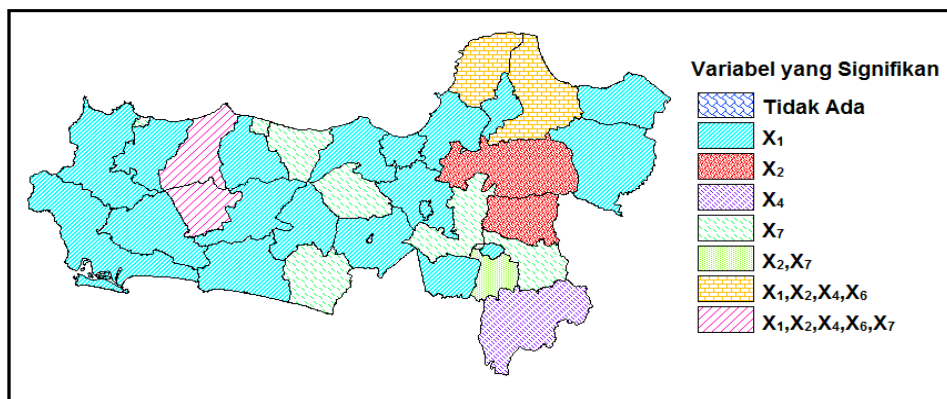
Secara umum, berdasarkan hasil perhitungan estimasi parameter dan statistik uji Z untuk setiap kabupaten/kota yang disajikan pada Lampiran 16 dan Lampiran 17, ternyata terdapat perbedaan parameter yang signifikan mempengaruhi jumlah kematian ibu, neonatal dini, dan neonatal lanjut di Provinsi Jawa Tengah. Perbedaan karakter variabel yang signifikan mempengaruhi jumlah kematian ibu, neonatal dini, dan neonatal lanjut untuk masing-masing wilayah disajikan pada Gambar 6.4 s.d. Gambar 6.6.



Gambar 6.4 Variabel Bebas yang Berpengaruh Signifikan Terhadap Jumlah Kematian Ibu Pada Model 4



Gambar 6.5 Variabel Bebas yang Berpengaruh Signifikan Terhadap Jumlah Kematian Neonatal Dini Pada Model 4

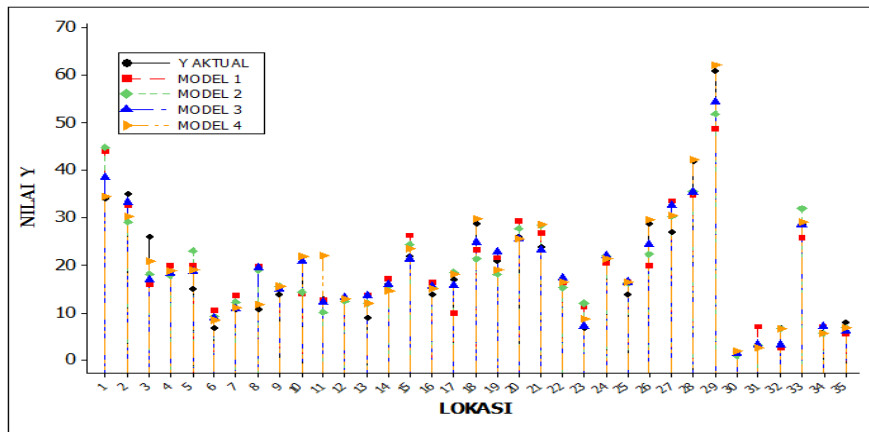


Gambar 6.6 Variabel Bebas yang Berpengaruh Signifikan Terhadap Jumlah Kematian Neonatal Lanjut Pada Model 4

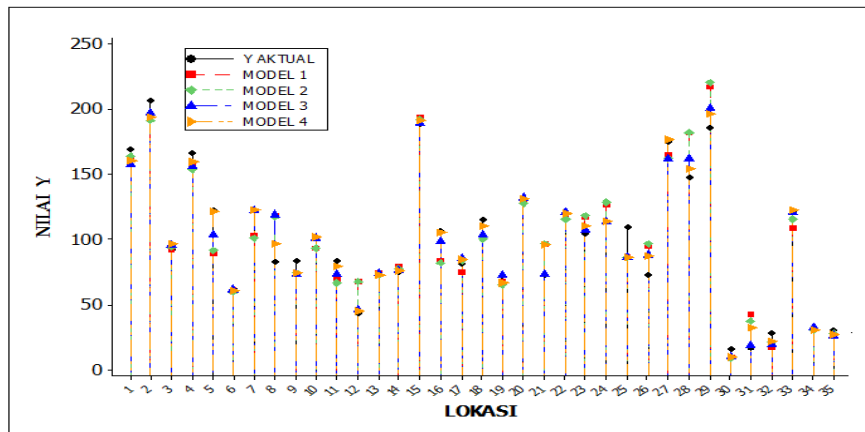
Sama seperti pada model dengan kovariansi konstanta, pada model ini juga terdapat perbedaan parameter yang signifikan mempengaruhi jumlah kematian ibu, neonatal dini, dan neonatal lanjut untuk masing-masing wilayah, sebagaimana disajikan pada Gambar 6.4 s.d. Gambar 6.6. Rasio dokter umum per 100.000 penduduk merupakan variabel yang paling banyak berpengaruh signifikan terhadap jumlah kematian ibu yang terjadi pada 11 kabupaten/kota. Untuk jumlah kematian neonatal dini, persentase ibu hamil yang mendapatkan tablet Fe3 dan persentase bayi dengan berat badan lahir rendah merupakan variabel bebas yang paling dominan berpengaruh, berturut-turut terjadi pada 27 dan 24 kabupaten/kota. Sedangkan persentase bayi dengan berat badan lahir rendah berpengaruh signifikan terhadap jumlah kematian neonatal lanjut yang terjadi di 10 kabupaten/kota.

#### 6.4 Perbandingan Model MPR dan GWMPR pada Pemodelan Jumlah Kematian Ibu, Neonatal Dini, dan Neonatal Lanjut

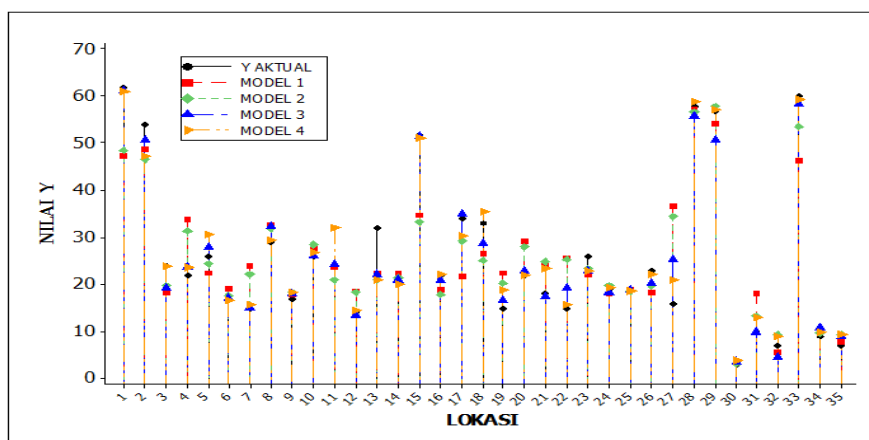
Pemodelan jumlah kematian ibu, neonatal dini, dan neonatal lanjut di Provinsi Jawa Tengah pada penelitian ini dilakukan dengan empat model, yaitu model MPR dan GWMPR masing-masing untuk kovariansi merupakan konstanta dan kovariansi merupakan fungsi variabel bebas. Perbandingan nilai dugaan jumlah kematian ibu, neonatal dini, dan neonatal lanjut dari keempat model terhadap nilai aktual berturut-turut disajikan dalam Gambar 6.7 s.d. Gambar 6.9.



Gambar 6.7 Perbandingan Nilai Dugaan Jumlah Kematian Ibu Terhadap Nilai Aktual



Gambar 6.8 Perbandingan Nilai Dugaan Jumlah Kematian Neonatal Dini Terhadap Nilai Aktual



Gambar 6.9 Perbandingan Nilai Dugaan Jumlah Kematian Neonatal Lanjut Terhadap Nilai Aktual

Nilai dugaan rata-rata jumlah kematian ibu, neonatal dini, dan neonatal lanjut dari keempat model sebagaimana disajikan pada Gambar 6.7 s.d. Gambar 6.9, terlihat mendekati nilai aktual. Model “terbaik” diantara keempat model tersebut dipilih dengan kriteria nilai MSE dan AIC masing-masing model, sebagaimana disajikan pada Tabel 6.23.

Tabel 6.23 Nilai MSE dan AIC dari Model MPR dan GWMPR

Model	Kovariansi Konstanta		Kovariansi Fungsi Variabel Bebas	
	MSE	AIC	MSE	AIC
MPR	467,018	827,834	452,100	810,968
GWMPR	310,603	744,439	266,686	738,328

Berdasarkan nilai MSE dan AIC yang disajikan pada Tabel 6.23, model GWMPR lebih baik daripada model MPR, baik untuk kovariansi merupakan konstanta maupun kovariansi merupakan fungsi variabel bebas. Hal tersebut dikarenakan adanya faktor spasial dari variabel-variabel penelitian ini, sehingga model GWMPR dapat mengendalikan variabilitas data. Sementara itu jika memperhatikan kovariansinya, model dengan kovariansi merupakan fungsi variabel bebas lebih baik daripada kovariansi merupakan konstan, baik untuk model MPR maupun GWMPR.

## 6.5. Interpretasi hasil

Pemodelan jumlah kematian ibu, neonatal dini, dan neonatal lanjut di Provinsi Jawa Tengah pada penelitian ini telah menghasilkan empat model yang berbeda. Pada kasus ini, karena adanya heterogenitas spasial dari data, maka GWMPR merupakan model yang lebih tepat digunakan daripada model MPR.

Berdasarkan hasil analisis model GWMPR baik untuk kovariansi merupakan konstanta maupun fungsi variabel bebas, rasio posyandu aktif dan dokter umum per 100.000 penduduk merupakan variabel yang dominan mempengaruhi jumlah kematian ibu khususnya untuk beberapa kabupaten/kota, yaitu : Kota Tegal, Kab. Purbalingga, Kota Pekalongan, Kab. Batang, Kab. Boyolali, dan Kab Karanganyar.



Keberadaan posyandu maupun dokter yang merupakan determinan jauh dari kematian ibu, tentunya akan memberikan pengaruh terhadap akses pelayanan kesehatan bagi masyarakat. Kurang optimalnya akses pelayanan kesehatan menyebabkan seorang ibu hamil sangat minim mendapatkan penyuluhan tentang pola hidup sehat bagi ibu hamil, misalnya: pemenuhan gizi, kebersihan, paritas, usia pesalinan sehat, keluarga berencana dan lain-lain. Dampak lain dari minimnya akses pelayanan kesehatan adalah kurang optimalnya perawatan oleh tenaga profesional bagi ibu hamil, bersalin, dan nifas, sehingga resiko kematian ibu akan meningkat.

Sementara itu, bayi dengan berat badan lahir rendah merupakan variabel yang dominan mempengaruhi jumlah kematian neonatal dini dan neonatal lanjut di Provinsi Jawa Tengah, khususnya wilayah bagian timur untuk kematian neonatal dini, dan wilayah bagian barat untuk kematian neonatal lanjut.

Bayi dengan berat badan lahir rendah pada umumnya disebabkan oleh: ibu hamil dengan gizi yang kurang, usia ibu hamil, jarak kehamilan yang terlalu dekat, paritas ibu, dan beberapa penyakit bawaan ibu hamil. Beberapa penyebab bayi dengan berat badan lahir rendah tersebut tidak lepas dari faktor sosial ekonomi dan kurangnya pengetahuan ibu tentang pola hidup sehat, yang muaranya adalah kurang optimalnya akses pelayanan kesehatan.



## BAB VII

### KESIMPULAN DAN SARAN

#### 7.1 Kesimpulan

Berdasarkan hasil dan pembahasan dengan memperhatikan tujuan penelitian, maka dapat ditarik suatu kesimpulan :

1. a. Model MPR, jika diberikan sampel random  $Y_{hi} \sim P(\lambda_h(s_i) + \lambda_0(s_i))$  ;  
 $i = 1, 2, \dots, n$  dan  $h = 1, 2, \dots, p$  dengan  $E[Y_{hi}] = \lambda_h(s_i) + \lambda_0(s_i)$  dimana  $s_i$  merupakan *exposure* pada unit ke  $i$ , dapat dituliskan :

- $E[Y_{hi}] = s_i e^{\mathbf{x}_i^T \boldsymbol{\beta}_h}$ , model 1 (kovariansi merupakan konstanta), dan
- $E[Y_{hi}] = s_i (e^{\mathbf{x}_i^T \boldsymbol{\beta}_h} + e^{\mathbf{x}_i^T \boldsymbol{\beta}_0})$ , model 2 (kovariansi merupakan fungsi variabel bebas).

- b. Estimasi parameter model MPR diperoleh dengan metode MLE dan penyelesaian iteratif melalui algoritma *Newton Raphson*, dimana elemen vektor gradien dan matriks Hessian berturut-turut diperoleh dari turunan parsial pertama dan kedua dari fungsi log-likelihood sebagai berikut :

- $Q_1 = n(p-1)\lambda_0 - \sum_{i=1}^n \sum_{h=1}^p s_i \exp(\mathbf{x}_i^T \boldsymbol{\beta}_h) + \sum_{i=1}^n \ln A_i$ , model 1, dan
- $Q_2 = \sum_{i=1}^n \ln B_i - \sum_{i=1}^n s_i e^{\mathbf{x}_i^T \boldsymbol{\beta}_0} - \sum_{i=1}^n \sum_{h=1}^p s_i e^{\mathbf{x}_i^T \boldsymbol{\beta}_h}$ , model 2.

- c. Statistik uji model MPR yang ditentukan dengan metode LRT, dan diperoleh statistik uji serentak sebagai berikut :

- $G_1 = 2 \left( n(p-1)(\hat{\lambda}_0 - \hat{\lambda}_{00}) - \sum_{i=1}^n \sum_{h=1}^p s_i (e^{\mathbf{x}_i^T \hat{\boldsymbol{\beta}}_h} - e^{\hat{\boldsymbol{\beta}}_{h0}}) + \sum_{i=1}^n (\ln \hat{A}_i - \ln \hat{A}_{i0}) \right)$ , model 1, dan
- $G_2 = 2 \left( \sum_{i=1}^n s_i (e^{\hat{\boldsymbol{\beta}}_{00}} - e^{\mathbf{x}_i^T \hat{\boldsymbol{\beta}}_0}) - \sum_{i=1}^n \sum_{h=1}^p s_i (e^{\mathbf{x}_i^T \hat{\boldsymbol{\beta}}_h} - e^{\hat{\boldsymbol{\beta}}_{h0}}) + \sum_{i=1}^n (\ln \hat{B}_i - \ln \hat{B}_{i0}) \right)$ , model 2

dimana kedua statistik uji berdistribusi Khi-Kuadrat dengan derajat bebas untuk model 1 dan model 2 berturut-turut adalah  $pk$  dan  $(p+1)k$ .

Sedangkan statistik uji parsial parameter  $\beta_{ml}$ , model 1 dan model 2 adalah :

$$Z = \frac{\hat{\beta}_{ml}}{\sqrt{\widehat{\text{var}}[\hat{\beta}_{ml}]}} \sim N(0,1)$$

2. a. Model GWMPR, jika diberikan sampel random,

$Y_{hi} \sim P(\lambda_h(s_i, \mathbf{u}_i) + \lambda_0(s_i, \mathbf{u}_i)); \quad i = 1, 2, \dots, n \quad \text{dan} \quad h = 1, 2, \dots, p$  dengan  
 $E[Y_{hi}] = \lambda_h(s_i)(\mathbf{u}_i) + \lambda_0(s_i)(\mathbf{u}_i)$ , dimana  $s_i$  merupakan *exposure* dan  
 $\mathbf{u}_i = (u_{1i} \quad u_{2i})$  merupakan vektor koordinat lintang dan bujur pada lokasi  $i$ ,  
dapat dituliskan :

- $E[Y_{hi}] = s_i e^{\mathbf{x}_i^T \boldsymbol{\beta}_h(\mathbf{u}_i)}$ , model 3 (kovariansi merupakan konstanta), dan
- $E[Y_{hi}] = s_i (e^{\mathbf{x}_i^T \boldsymbol{\beta}_h(\mathbf{u}_i)} + e^{\mathbf{x}_i^T \boldsymbol{\beta}_0(\mathbf{u}_i)})$ , model 4 (kovariansi merupakan fungsi variabel bebas).

b. Estimasi parameter model MPR diperoleh dengan metode MLE dan penyelesaian iteratif melalui algoritma *Newton Raphson*, dimana elemen vektor gradien dan matriks Hessian pada lokasi ke- $i$  berturut-turut diperoleh dari turunan parsial pertama dan kedua dari fungsi log-likelihood pada lokasi ke- $i$  sebagai berikut :

- $Q_1 = \sum_{j=1}^n w_{ij} (p-1) \lambda_0(\mathbf{u}_i) - \sum_{j=1}^n \sum_{h=1}^p w_{ij} s_j \exp(\mathbf{x}_j^T \boldsymbol{\beta}_h(\mathbf{u}_i)) + \sum_{j=1}^n w_{ij} \ln C_j$ , model 3, dan
- $Q_2 = \sum_{j=1}^n w_{ij} \ln D_j - \sum_{j=1}^n w_{ij} s_j e^{\mathbf{x}_j^T \boldsymbol{\beta}_0(\mathbf{u}_i)} - \sum_{j=1}^n \sum_{h=1}^p w_{ij} s_j e^{\mathbf{x}_j^T \boldsymbol{\beta}_h(\mathbf{u}_i)}$ , model 4.

c. Statistik uji model GWMPR untuk kovariansi merupakan kontanta maupun fungsi dari variabel bebas ditentukan dengan metode LRT dan diperoleh statistik uji serentak berturut-turut untuk model 3 dan 4 adalah :

- $G_3 = 2 \left( (p-1) \sum_{i=1}^n (\hat{\lambda}_0(\mathbf{u}_i) - \hat{\lambda}_{00}(\mathbf{u}_i)) - \sum_{i=1}^n \sum_{h=1}^p s_i (e^{\mathbf{x}_i^T \hat{\boldsymbol{\beta}}_h(\mathbf{u}_i)} - e^{\hat{\beta}_{h0}(\mathbf{u}_i)}) + \sum_{i=1}^n (\ln \hat{C}_i - \ln \hat{C}_{i0}) \right)$ , dan
- $G_4 = 2 \left( - \sum_{i=1}^n s_i (e^{\mathbf{x}_i^T \hat{\boldsymbol{\beta}}_0(\mathbf{u}_i)} - e^{\hat{\beta}_{00}(\mathbf{u}_i)}) - \sum_{i=1}^n \sum_{h=1}^p s_i (e^{\mathbf{x}_i^T \hat{\boldsymbol{\beta}}_h(\mathbf{u}_i)} - e^{\hat{\beta}_{h0}(\mathbf{u}_i)}) + \sum_{i=1}^n (\ln \hat{D}_i - \ln \hat{D}_{i0}) \right)$ ,

dimana kedua statistik uji berdistribusi Khi-Kuadrat dengan derajat bebas merupakan selisih antara jumlah parameter efektif dalam model di bawah  $H_0$  dan populasi.

Sedangkan statistik uji parsial untuk parameter  $\hat{\beta}_{ml}$  pada lokasi ke- $j$  dari model 3 dan model 4 adalah :

$$Z = \frac{\hat{\beta}_{ml}(\mathbf{u}_j)}{\sqrt{\widehat{\text{var}}[\hat{\beta}_{ml}(\mathbf{u}_j)]}} \sim N(0,1)$$

3. a. Hasil pemodelan jumlah kematian ibu, neonatal dini, dan neonatal lanjut di Provinsi Jawa Tengah, persentase bayi dengan berat badan lahir rendah memberikan kontribusi terbesar terhadap jumlah kematian neonatal dini dan neonatal lanjut. Sementara itu rasio posyandu aktif per 100.000 penduduk memberikan kontribusi terbesar terhadap jumlah kematian ibu
- b. Berdasarkan nilai MSE maupun AIC, hasil pemodelan jumlah kematian ibu, neonatal dini, dan neonatal lanjut menggunakan model GWMPR lebih baik daripada model MPR, baik untuk kovariansi merupakan konstanta maupun kovariansi merupakan fungsi variabel bebas. Sementara itu jika memperhatikan kovariansinya, model dengan kovariansi merupakan fungsi variabel bebas lebih baik daripada kovariansi merupakan konstan.

## 7.2 Saran

Berdasarkan hasil penelitian ini, saran yang dapat peneliti sampaikan antara lain:

1. Analisis data pada model MPR maupun GWMPR dengan kovariansi merupakan konstanta mempunyai komputasi dan interpretasi model yang lebih sederhana, akan tetapi model dengan kovariansi merupakan fungsi variabel bebas dapat memberikan informasi yang lengkap. Oleh karena itu pemilihan model mana yang akan digunakan, tergantung pada tujuan dan kasus yang akan dianalisis.
2. Dalam aplikasinya, analisis pada *spatial count data* sering terjadi adanya kasus *excess zeros* dan overdispersi. Oleh karena itu penelitian ini dapat dikembangkan beberapa model untuk mengatasi permasalahan tersebut, misalnya : *geographically weighted multivariate zero inflated Poisson regression* (GWMZIPR), *geographically weighted multivariate generalized Poisson regression* (GWMGPR), atau *geographically weighted multivariate negative binomial regression* (GWMNBR) .
3. Perlu peningkatan akses pelayanan kesehatan ibu hamil baik secara kuantitas maupun kualitas di Provinsi Jawa Tengah, khususnya beberapa kabupaten/kota, dimana akses pelayanan kesehatan tersebut menjadi faktor

yang dominan mempengaruhi jumlah kematian ibu, yaitu : Kota Tegal, Kabupaten Purbalingga, Kota Pekalongan, Kabupaten Batang, Kabupaten Boyolali, dan Kabupaten Karanganyar.

4. Penyuluhan dan pendampingan yang intensif tentang kesehatan ibu hamil perlu menjadi prioritas, baik melalui lembaga yang dikelola masyarakat maupun pemerintah. Diharapkan dengan pendampingan ini akan menjadi pencerahan kepada masyarakat tentang pola hidup sehat ibu hamil, misalnya: kebutuhan gizi, umur sehat saat persalinan, paritas dan lain-lain. Hal tersebut tentunya dapat mengurangi resiko bayi dengan berat badan lahir rendah, dimana merupakan faktor yang sangat dominan mempengaruhi jumlah kematian neonatal dini dan neonatal lanjut di Provinsi Jawa Tengah, khususnya wilayah di bagian timur untuk kematian neonatal dini dan wilayah bagian barat untuk kematian neonatal lanjut.

## DAFTAR PUSTAKA

- Anselin, L.(1988), *Spatial Econometrics: Methods and Models*, Kluwer Academic Publishers, Boston.
- Badan Pusat Statistik, Badan Kependudukan dan Keluarga Berencana Nasional, dan Kementerian Kesehatan (2013), *Survei Demografi dan Kesehatan Indonesia Tahun 2012*, BPS, BKKBN, dan Kemenkes RI, Jakarta.
- Berkhout, P. dan Plug, E. (2004), “A Bivariate Poisson Count Data Model Using Conditional Probabilities”, *Statistica Neerlandica*, 58, hal : 349-364.
- Best, N.G., Katja, I., dan Robert, L.W. (2000), “Spatial Poisson Regression for Health and Exposure Data Measured at Disparate Resolutions”, *Journal of The American Statistical Assosiation*, 10, hal : 1-34.
- Boneh, S. dan Mendieta, G.R. (1992). “Regression Modeling Using Principal Components”, *Annual Conference on Applied Statistics in Agriculture*, Kansas State University, hal : 222-232.
- Brunsdon, C., Fotheringham, A.S., dan Charlton, M. (1996), “Geographically Weighted Regression: A Method for Exploring Spatial Nonstationarity”, *Geographical Analysis*, 28, hal : 281-298.
- Cameron, A.C. dan Trivedi, P.K. (1998), *Regression Analysis of Count Data*, Cambridge University Press, Cambridge.
- Charlton, M. dan Fotheringham, A.S. (2009), “Geographically Weighted Regression”, *White Paper*, National Center for Geocomputation, National University of Ireland Maynooth, Ireland.
- Craven, P. dan Wahba, G. (1979), “Smoothing Noisy Data With Spline Functions: Estimating The Correct Degree of Smoothing By The Method of Generalized Cross Validation”, *Numerical Mathematics*, 31, hal : 317-403.
- Cressie, N.A.C.(1991), *Statistics for Spatial Data*, Revised Edition, John Wiley & Sons, New York.
- David, T.Y.L. (2008), *Manual Persalinan*, Edisi 3, EGC, Jakarta.
- Departemen Kesehatan Republik Indonesia (2009), *Indonesia Sehat 2010 : Visi Baru, Misi, Kebijakan, dan Strategi Pembangunan Kesehatan*, Depkes RI, Jakarta.
- Dinas Kesehatan Provinsi Jawa Tengah (2014), *Profil Kesehatan Provinsi Jawa Tengah Tahun 2013*, Dinkes Jateng, Semarang.

- Direktorat Jenderal Pembinaan Kesehatan Masyarakat (1997), *Pedoman Pelaksanaan Upaya Peningkatan Kesehatan Neonatal*, Depkes RI, Jakarta.
- Fotheringham, A.S., Brunsdon, C., dan Charlton, M. (1998), "Geographically Weighted Regression: A Natural Evolution of The Expansion Method for Spatial Data Analysis", *Environment and Planning*, 30, hal : 1905-1927.
- Fotheringham, A.S., Brunsdon, C., dan Charlton, M. (2002). *Geographically Weighted Regression : The Analysis of Spatially Varying Relationships*, John Wiley & Sons Ltd, England.
- Frome, E.L. (1983), "The Analysis of Rates Using Poisson Regression Models", *Biometrics*, 39, hal : 665-674.
- Frome, E.L., Kutner, M.K., dan Beauchamp, J.J. (1973), "Regression Analysis of Poisson Distributed Data", *Journal of the American Statistical Association*, 68, hal : 935-40.
- Frome, E.L. dan Morris, M.D. (1989), "Evaluating Goodness of Fit of Poisson Regression Models in Cohort Studies", *The American Statistician*, 43, hal : 144-147.
- Hadayeghi, A., Shalaby, A. S., dan Persaud, B. N. (2010), "Development of Planning Level Transportation Safety Tools Using Geographically Weighted Regression, *Accident Analysis & Prevention*, 42, hal : 676-688.
- Holgate, P. (1964), "Estimation for The Bivariate Poisson Distribution", *Biometrika*, 51, hal : 241-245.
- Johnson, N., Kotz, S., dan Balakrishnan, N. (1996). *Discrete Multivariate Distributions*, Wiley, New York.
- Jung, R.C. dan Winkelmann, R. (1993), "Two Aspects of Labor Mobility : A Bivariate Poisson Regression Approach", *Empirical Economics*, 18, hal : 543-556.
- Karlis, D. dan Ntzoufras, L. (2003), "Analysis of Sports Data By Using Bivariate Poisson Models", *The Statistician*, 52, hal : 381-393.
- Karlis, D. dan Ntzoufras, L. (2005), "Bivariate Poisson and Diagonal Inflated Bivariate Poisson Regression Models in R", *Journal of Statistical Software*, 14, hal : 1-36.
- Karlis, D. dan Meligkotsidou, L. (2005), "Multivariate Poisson Regression with Covariance Structure", *Journal Statistics and Computing*, 15, hal : 255-265.
- Kawamura, K. (1976), "The Structure of Trivariate Poisson Distribution", *Kodai Math*, 28, hal : 1-8.



- Kawamura, K. (1979), "The Structure of Multivariate Poisson Distribution", *Kodai Math*, 2, hal : 337-345.
- Kawamura, K. (1984), "Direct Calculation of Maximum Likelihood Estimator for The Bivariate Poisson Distribution", *Kodai Math*, 7, hal : 211-221.
- Le, C. T. (2003), *Introductory Biostatistics*, John Wiley & Sons Inc., Hoboken, New Jersey.
- Loukas, S. dan Papageorgiou, H. (1991), "On A Trivariate Poisson Distribution", *Applications of Mathematics*, 36, hal : 432-439.
- McCarthy, J. dan Maine, D. (1992), "A Framework for Analyzing The Determinants of Maternal Mortality", *Studies in Family Planning*, 23, hal : 23-33.
- Miller, H.J. (2004), "Tobler's First Law and Spatial Analysis", *Annals of the Association of America Geographers*, 94, hal : 284-289.
- Mochtar, R. (1998), *Sinopsis Obstetri*, Jilid I, EGC, Jakarta.
- Montgomery, D.C. dan Peck, E.A. (1991), *Introduction to Linear Regression Analysis*, John Wiley & Sons, New York.
- Murwati, A.K dan Zulaikhah, S. (2015), "Faktor Ibu, Bayi dan Budaya yang Mempengaruhi Kejadian Kematian Bayi di Puskesmas Pedan", *Jurnal Kesehatan*, 4, hal : 83-88.
- Nakaya, T., Fotheringham A.S., dan Brudson, C. (2005), "Geographically Weighted Poisson Regression for Disease Association Mapping", *Statistics in Medicine*, 24, hal : 2695-2717.
- Nakaya, T., Fotheringham, A.S., Charlton, M. dan Brunson, C. (2009), "Semiparametric Geographically Weighted Generalised Linear Modelling in GWR 4.0", *10th International Conference on GeoComputation*, UNSW, Sydney.
- Nelder, J.A. dan Wedderburn, R.W.M. (1972), "Generalized Linear Models", *Journal of the Royal Statistical Society*, 135, hal : 370-384.
- Nina, F.R. dan Purhadi (2014), "Pemodelan Jumlah Kematian Ibu dan Jumlah Kematian Bayi di Provinsi Jawa Timur Menggunakan Bivariate Poisson Regression", *Jurnal Sains dan Seni Pomits*, 3, hal : 194-199.
- Patel, D.A., Burnett, N.M., dan Curtis, K.M. (2003), *Maternal Health Epidemiology*, Department of Health and Human Services, CDC, Atlanta.

- Pawitan, Y. (2001), *In All Likelihood : Statistical Modelling and Inference Using Likelihood*, Clarendon Press, Oxford.
- Rutstein, S.O. (2000), "Factors Associated with Trends in Infant and Child Mortality in Developing Countries During The 1990", *Bulletin WHO*, 78, hal : 1256-1270.
- Santos, S.J.M.C. dan Tenreyro, S. (2010), "On The Existence of The Maximum Likelihood Estimates in Poisson Regression", *Economics Letters*, 107, hal : 310-312.
- Triyanto, Purhadi, Otok, B.W., dan Purnami S.W. (2015), "Parameter Estimation of Geographically Weighted Multivariate Poisson Regression", *Applied Mathematical Sciences*, 9, hal : 4081-4093.
- Triyanto, Purhadi, Otok, B.W., dan Purnami S.W. (2016), "Hypothesis Testing of Geographically Weighted Multivariate Poisson Regression", *Far East Journal of Mathematical Sciences*, 100, hal : 747-762.
- Voung, Q.H. (1989), "Likelihood Ratio Tests for Model Selection and Non-Nested Hypothesis", *Econometrica*, 57, hal : 307-333.
- Walsh, L.V. (2007), *Buku Ajar Kebidanan Komunitas*, EGC, Jakarta.
- World Health Organization (2007), *Maternal Mortality in 2005 : Estimates Developed by WHO, UNICEF, UNFPA, and The World Bank*, WHO Press, Geneva.
- Yan, X. dan Sun, X. (2009), *Linear Regression Analysis*, World Scientific Publishing Co. Pte. Ltd., Singapore.
- Yang, T., Shoff, C., dan Matthews, S.A. (2013), "Examining the Spatially Non-Stationary Associations Between The Second Demographic Transition and Infant Mortality : A Poisson GWR Approach", *Spatial Demography*, 1, hal : 17-40.
- Zeileis, A., Kleiber, C., dan Jackman, S. (2008), "Regression Models for Count Data in R", *Journal of Statistical Software*, 27, hal : 1-12.
- Zhang, L., Gove, J. H., dan Heath, L. S. (2005), "Spatial Residual Analysis of Six Modeling Techniques", *Ecological Modeling*, 186, hal : 154-177.

### LAMPIRAN 1 : Data Penelitian

<b>Variabel Kab/Kota</b>	<b>X<sub>1</sub></b>	<b>X<sub>2</sub></b>	<b>X<sub>3</sub></b>	<b>X<sub>4</sub></b>	<b>X<sub>5</sub></b>	<b>X<sub>6</sub></b>	<b>X<sub>7</sub></b>
Kab. Cilacap	92,75	92,33	97,86	4,01	70,06	47,49	14,8
Kab. Banyumas	92,38	89,66	100,00	5,45	58,10	95,42	32,9
Kab. Purbalingga	96,62	94,02	97,20	4,32	66,88	117,97	14,6
Kab. Banjarnegara	86,47	84,43	97,20	6,37	39,27	74,84	12,8
Kab. Kebumen	97,77	97,77	97,15	2,91	67,62	135,80	17,6
Kab. Purworejo	87,91	89,43	97,65	5,26	72,90	110,14	23,5
Kab. Wonosobo	86,42	89,60	96,29	5,42	51,29	91,38	11,7
Kab. Magelang	89,26	90,64	97,65	4,80	65,55	117,62	16,5
Kab. Boyolali	92,46	90,29	93,90	1,54	36,87	100,54	16,2
Kab. Klaten	91,26	92,14	96,80	4,16	70,53	179,11	30,9
Kab. Sukoharjo	90,18	90,58	96,71	3,41	80,44	115,13	51,0
Kab. Wonogiri	92,11	96,49	96,77	4,79	68,50	113,54	16,9
Kab. Karanganyar	90,11	89,03	98,23	3,45	73,09	111,88	35,0
Kab. Sragen	92,97	94,86	96,29	3,76	77,90	87,39	27,5
Kab. Grobogan	88,46	82,46	98,56	4,02	65,82	57,55	12,8
Kab. Blora	92,60	92,60	97,13	5,40	66,44	46,89	13,3
Kab. Rembang	80,81	83,87	98,71	5,44	50,75	78,34	15,3
Kab. Pati	92,27	92,09	97,66	3,02	59,42	58,37	19,6
Kab. Kudus	94,18	94,95	99,54	2,04	80,80	44,03	33,6
Kab. Jepara	94,07	90,51	97,53	3,39	64,91	42,58	18,2
Kab. Demak	97,41	97,41	99,60	3,10	73,35	71,08	13,1
Kab. Semarang	90,70	83,36	95,49	5,37	77,53	104,51	27,6
Kab. Temanggung	92,41	92,64	97,32	10,13	72,50	153,30	14,8
Kab. Kendal	93,16	73,48	96,77	0,07	63,41	63,23	16,5
Kab. Batang	93,66	93,01	99,16	5,44	59,93	67,84	11,1
Kab. Pekalongan	98,80	94,24	87,77	4,20	64,00	85,01	14,2
Kab. Pemalang	90,29	86,20	96,74	2,91	59,78	37,28	14,2
Kab. Tegal	86,39	88,79	96,29	4,81	52,92	84,59	12,5
Kab. Brebes	90,33	91,46	97,88	4,28	45,49	26,01	10,3
Kota Magelang	95,60	95,85	99,00	5,73	89,43	143,41	98,9
Kota Surakarta	97,73	97,50	99,51	2,14	71,74	117,56	162,7
Kota Salatiga	93,46	88,86	95,53	5,50	74,57	86,79	89,0
Kota Semarang	95,99	95,15	92,73	1,08	89,00	73,57	125,6
Kota Pekalongan	94,66	94,34	99,27	4,83	85,81	97,29	53,5
Kota Tegal	95,89	95,28	99,23	5,46	50,63	75,04	52,5

<b>Variabel Kab/Kota</b>	<b>X<sub>8</sub></b>	<b>X<sub>9</sub></b>	<b>X<sub>10</sub></b>	<b>Y<sub>1</sub></b>	<b>Y<sub>2</sub></b>	<b>Y<sub>3</sub></b>	<b>s</b>
Kab. Cilacap	91,35	18,72	15,24	34	169	62	29.652
Kab. Banyumas	94,62	17,66	18,44	35	207	54	27.744
Kab. Purbalingga	93,35	21,24	20,53	26	93	24	15.202
Kab. Banjarnegara	88,72	30,84	18,71	19	167	22	16.314
Kab. Kebumen	90,05	11,93	21,32	15	123	26	20.375
Kab. Purworejo	93,43	14,96	15,44	7	63	17	9.615
Kab. Wonosobo	92,14	34,19	22,08	11	123	15	13.056
Kab. Magelang	93,06	17,94	13,96	11	83	29	18.993
Kab. Boyolali	88,30	19,25	13,27	14	84	17	14.729
Kab. Klaten	88,15	5,48	15,60	22	102	26	17.734
Kab. Sukoharjo	89,59	10,79	9,87	13	84	21	13.152
Kab. Wonogiri	85,38	21,54	14,02	13	44	14	12.328
Kab. Karanganyar	89,72	12,50	13,58	9	75	32	13.249
Kab. Sragen	83,44	20,22	15,93	16	76	20	15.125
Kab. Grobogan	91,81	34,95	14,87	22	189	52	21.570
Kab. Blora	84,71	31,36	14,64	14	107	22	11.752
Kab. Rembang	91,52	30,58	20,97	17	82	34	8.938
Kab. Pati	88,27	24,70	12,94	29	116	33	18.465
Kab. Kudus	93,48	16,67	8,62	21	72	15	15.740
Kab. Jepara	93,83	26,14	9,23	26	132	22	20.912
Kab. Demak	93,10	19,89	15,72	24	73	18	20.605
Kab. Semarang	94,57	16,03	8,51	17	120	15	14.141
Kab. Temanggung	92,87	24,15	12,42	7	105	26	11.203
Kab. Kendal	90,46	20,01	12,68	21	114	19	16.307
Kab. Batang	90,74	28,12	11,96	14	110	19	12.478
Kab. Pekalongan	92,76	21,64	13,51	29	73	23	15.826
Kab. Pemalang	90,23	29,20	19,27	27	175	16	24.335
Kab. Tegal	91,45	19,24	10,58	42	148	58	28.643
Kab. Brebes	88,08	32,57	20,82	61	186	57	33.074
Kota Magelang	97,68	6,83	9,80	1	16	3	1.798
Kota Surakarta	96,53	6,09	11,74	3	17	10	9.927
Kota Salatiga	95,71	10,95	6,40	7	28	7	2.507
Kota Semarang	97,10	7,92	5,25	29	122	60	27.065
Kota Pekalongan	95,33	8,91	8,26	6	31	9	6.061
Kota Tegal	95,23	15,94	8,84	8	31	7	4.520

**Keterangan :**

- $Y_1$  : Jumlah Kematian Ibu
- $Y_2$  : Jumlah Kematian Neonatal Dini
- $Y_3$  : Jumlah Kematian Neonatal Lanjut
- $X_1$  : Persentase kunjungan ibu hamil K4
- $X_2$  : Persentase ibu hamil yang mendapatkan tablet Fe3
- $X_3$  : Persentase kunjungan neonatal lengkap
- $X_4$  : Persentase bayi dengan berat badan lahir rendah
- $X_5$  : Persentase rumah sehat
- $X_6$  : Rasio posyandu aktif per 100.000 penduduk
- $X_7$  : Rasio dokter umum per 100.000 penduduk
- $X_8$  : Persentase penduduk usia 10 tahun ke atas yang melek huruf
- $X_9$  : Persentase perempuan yang menikah dibawah usia 17 tahun.
- $X_{10}$  : Persentase penduduk miskin
- $s$  : Banyaknya bayi lahir hidup



**LAMPIRAN 2 : Letak Kabupaten/Kota di Jawa Tengah Berdasarkan Garis  
Lintang Bujur**

<b>Kab/Kota</b>	<b>Lintang</b>	<b>Bujur</b>
Kab. Cilacap	-7,73	109,01
Kab. Banyumas	-7,42	109,23
Kab. Purbalingga	-7,39	109,36
Kab. Banjarnegara	-7,40	109,69
Kab. Kebumen	-7,69	109,65
Kab. Purworejo	-7,71	110,01
Kab. Wonosobo	-7,36	109,90
Kab. Magelang	-7,56	110,23
Kab. Boyolali	-7,53	110,59
Kab. Klaten	-7,70	110,60
Kab. Sukoharjo	-7,68	110,84
Kab. Wonogiri	-7,81	110,92
Kab. Karanganyar	-7,60	110,95
Kab. Sragen	-7,43	111,00
Kab. Grobogan	-7,10	110,91
Kab. Blora	-6,97	111,41
Kab. Rembang	-6,71	111,35
Kab. Pati	-6,75	111,04

<b>Kab/Kota</b>	<b>Lintang</b>	<b>Bujur</b>
Kab. Kudus	-6,81	110,84
Kab. Jepara	-6,59	110,67
Kab. Demak	-6,89	110,64
Kab. Semarang	-7,14	110,41
Kab. Temanggung	-7,32	110,17
Kab. Kendal	-6,92	110,20
Kab. Batang	-6,91	109,73
Kab. Pekalongan	-7,02	109,60
Kab. Pemalang	-6,89	109,38
Kab. Tegal	-6,99	109,13
Kab. Brebes	-6,87	109,04
Kota Magelang	-7,48	110,22
Kota Surakarta	-7,57	110,83
Kota Salatiga	-7,33	110,50
Kota Semarang	-6,98	110,41
Kota Pekalongan	-6,89	109,68
Kota Tegal	-6,87	109,13





### LAMPIRAN 3 : Output Minitab "Deskripsi Data Penelitian"

```
MTB > Describe 'Y1' 'Y2' 'Y3' 'X1' - 'X10';
SUBC> Mean;
SUBC> StDeviation;
SUBC> Median;
SUBC> Minimum;
SUBC> Maximum;
SUBC> Count.
```

#### Descriptive Statistics: Y1; Y2; Y3; X1; X2; X3; X4; X5; X6; X7; X8; X9; X10

Variable	Total Count	Mean	StDev	Minimum	Median	Maximum
Y1	35	19.14	12.12	1.00	17.00	61.00
Y2	35	101.14	50.08	16.00	102.00	207.00
Y3	35	25.83	16.18	3.00	22.00	62.00
X1	35	92.215	3.836	80.810	92.460	98.800
X2	35	91.009	5.056	73.480	92.090	97.770
X3	35	97.175	2.273	87.770	97.320	100.000
X4	35	4.229	1.781	0.070	4.280	10.130
X5	35	66.21	12.78	36.87	66.88	89.43
X6	35	88.93	34.76	26.01	86.79	179.11
X7	35	32.89	34.88	10.30	16.90	162.70
X8	35	91.622	3.418	83.440	91.810	97.680
X9	35	19.69	8.38	5.48	19.25	34.95
X10	35	13.858	4.463	5.250	13.580	22.080



#### LAMPIRAN 4 : Uji Distribusi Poisson Trivariat

Pengujian hipotesis untuk menentukan apakah data jumlah kematian ibu, neonatal dini dan neonatal lanjut berdistribusi Poisson trivariat dilakukan dengan *Crockett's Test*, dengan tahapan uji sebagai berikut :

- Formulasi Hopotesis

$H_0$  : variabel random  $(Y_1, Y_2, Y_3)$  berdistribusi Poisson trivariat

$H_1$  : variabel random  $(Y_1, Y_2, Y_3)$  tidak berdistribusi Poisson trivariat

- Tingkat Signifikan  $(\alpha)=0,05$

- Statistika Uji

$$T = Z' \hat{V}^{-1} Z \sim \chi^2_{(3)}$$

dimana

$$Z' = \begin{bmatrix} Z_{Y_1} & Z_{Y_2} & Z_{Y_3} \end{bmatrix}$$

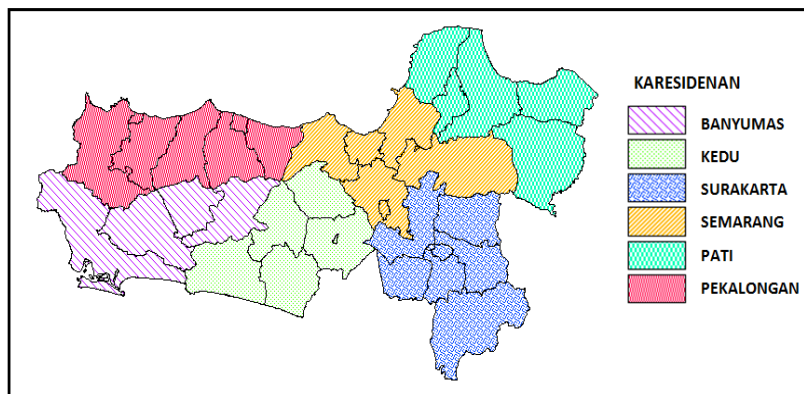
$$Z_h = \text{var}[Y_h] - \bar{Y}_h ; h = 1, 2, 3$$

$$\hat{V} = \frac{2}{n} \begin{bmatrix} \hat{\lambda}_1^2 & \hat{\lambda}_{12}^2 & \hat{\lambda}_{13}^2 \\ \hat{\lambda}_{12}^2 & \hat{\lambda}_2^2 & \hat{\lambda}_{23}^2 \\ \hat{\lambda}_{13}^2 & \hat{\lambda}_{23}^2 & \hat{\lambda}_3^2 \end{bmatrix}$$

dengan,  $\hat{\lambda}_{hg} = \text{cov}[Y_h, Y_g]$  dan  $\hat{\lambda}_h = \text{var}[Y_h]$  ;  $h, g = 1, 2, 3$  ( $h \neq g$ )

- Komputasi Statistik uji

Mempertimbangkan adanya heterogenitas spasial, pengujian distribusi dari variabel respon dibagi menjadi 6 kelompok berdasarkan wilayah karesidenan seperti disajikan pada gambar di bawah, yaitu : Banyumas, Kedu, Surakarta, Semarang, Pati, dan Pekalongan.



a. Karesidenan Banyumas :

$$T = [27,83 \quad 2115,67 \quad 379,17] \left( \begin{bmatrix} 2,3299 & 0,0093 & -0,2821 \\ 0,0093 & 0,0005 & -0,0021 \\ -0,2821 & -0,0021 & 0,0474 \end{bmatrix} 10^{-3} \right) \begin{bmatrix} 27,83 \\ 2115,67 \\ 379,17 \end{bmatrix}$$

$$= 2,655$$

b. Karesidenan Kedu :

$$T = [14,40 \quad 1621,60 \quad 75,33] \left( \begin{bmatrix} 1,4275 & -0,0121 & -0,0868 \\ -0,0121 & 0,0002 & -0,0004 \\ -0,0868 & -0,0004 & 0,0484 \end{bmatrix} 10^{-2} \right) \begin{bmatrix} 14,40 \\ 1621,60 \\ 75,33 \end{bmatrix}$$

$$= 3,395$$

c. Karesidenan Surakarta :

$$T = [21,62 \quad 756,62 \quad 34,33] \left( \begin{bmatrix} 5,8527 & -0,1957 & 0,9403 \\ -0,1957 & 0,0135 & -0,0857 \\ 0,9403 & -0,0857 & 1,7598 \end{bmatrix} 10^{-3} \right) \begin{bmatrix} 21,62 \\ 756,62 \\ 34,33 \end{bmatrix}$$

$$= 3,085$$

d. Karesidenan Semarang :

$$T = [36,00 \quad 2804,60 \quad 449,40] \left( \begin{bmatrix} 1,3507 & -0,0019 & -0,0788 \\ -0,0019 & 0,0005 & -0,0014 \\ -0,0788 & -0,0014 & 0,0224 \end{bmatrix} 10^{-3} \right) \begin{bmatrix} 36,00 \\ 2804,60 \\ 449,40 \end{bmatrix}$$

$$= 3,645$$

e. Karesidenan Pati :

$$T = [16,90 \quad 503,40 \quad 40,50] \left( \begin{bmatrix} 1,8235 & -0,0293 & -0,0229 \\ -0,0293 & 0,0073 & -0,0012 \\ -0,0229 & -0,0012 & 0,5798 \end{bmatrix} 10^{-3} \right) \begin{bmatrix} 16,90 \\ 503,40 \\ 40,50 \end{bmatrix}$$

$$= 2,742$$

f. Karesidenan Pekalongan :

$$T = [365,86 \quad 4102,19 \quad 437,33] \left( \begin{bmatrix} 0,9836 & -0,0298 & -0,5704 \\ -0,9792 & 0,0035 & 0,0053 \\ -0,5704 & 0,0053 & 0,5405 \end{bmatrix} 10^{-4} \right) \begin{bmatrix} 365,86 \\ 4102,19 \\ 437,33 \end{bmatrix}$$

$$= 4,311$$

- Daerah Kritis

$H_0$  ditolak jika  $T > \chi^2_{(3;0,05)} = 7,815$

- Kesimpulan

Berdasarkan hasil komputasi, semua wilayah karesidenan mempunyai nilai statistik uji ( $T$ ) yang lebih kecil dari 7,815 sehingga  $H_0$  tidak ditolak. Hal itu berarti variabel random  $(Y_1, Y_2, Y_3)$  untuk masing-masing karesidenan berdistribusi Poisson trivariat.



## LAMPIRAN 5 : Output Minitab “Nilai Korelasi Antar Variabel ”

MTB > Correlation 'Y1' 'Y2' 'Y3'.

### Correlations: Y1; Y2; Y3

	Y1	Y2
Y2	0.717	
	0.000	
Y3	0.743	0.719
	0.000	0.000

MTB > Correlation 'X1'-'X10'.

### Correlations: X1; X2; X3; X4; X5; X6; X7; X8; X9; X10

	X1	X2	X3	X4	X5	X6	X7	X8	X9
X2	0.600								
	0.000								
X3	-0.149	0.043							
	0.394	0.805							
X4	-0.297	0.070	0.155						
	0.084	0.689	0.374						
X5	0.422	0.327	0.044	-0.083					
	0.012	0.056	0.803	0.634					
X6	0.094	0.251	-0.037	0.305	0.300				
	0.591	0.146	0.834	0.075	0.080				
X7	0.387	0.321	0.037	-0.212	0.492	0.236			
	0.022	0.060	0.832	0.221	0.003	0.172			
X8	0.283	0.090	0.098	0.065	0.349	0.134	0.567		
	0.100	0.608	0.575	0.712	0.040	0.444	0.000		
X9	-0.462	-0.371	0.011	0.238	-0.625	-0.586	-0.670	-0.426	
	0.005	0.028	0.949	0.169	0.000	0.000	0.000	0.011	
X10	-0.340	-0.113	0.119	0.116	-0.524	-0.013	-0.528	-0.434	0.528
	0.046	0.520	0.495	0.506	0.001	0.940	0.001	0.009	0.001





## LAMPIRAN 6 : Uji Korelasi Antar Variabel Respon

Multivariate Poisson regression (MPR) merupakan pengembangan dari regresi Poisson univariat ketika terdapat dua atau lebih variabel respon yang berupa *count data* saling berkorelasi. Untuk itu sebelum pemodelan dengan MPR perlu dilakukan pengujian adanya korelasi antar variabel respon.

Menurut Rencher (2002), untuk menguji apakah ada korelasi antar variabel respon dilakukan dengan uji *Sphericity* sebagai berikut :

- Formulasi Hipotesis

$$H_0 : \mathbf{R} = \mathbf{I}$$

$$H_1 : \mathbf{R} \neq \mathbf{I}$$

- Tingkat Signifikan ( $\alpha$ ) = 0,05
- Statistik Uji

$$W = -n \ln \left[ \frac{|\mathbf{S}|}{(\text{trace}(\mathbf{S}) / p)^p} \right] \sim \chi^2_{\frac{1}{2}p(p+1)-1}$$

dimana

$$\mathbf{S} = \frac{1}{n-1} \sum_{j=1}^n (\mathbf{Y}_j - \bar{\mathbf{Y}})(\mathbf{Y}_j - \bar{\mathbf{Y}})^T$$

- Komputasi

$$\mathbf{S} = \begin{bmatrix} 146,95 & 435,33 & 145,67 \\ 435,33 & 2507,89 & 582,56 \\ 145,67 & 582,56 & 261,85 \end{bmatrix}$$

$$W = -35 \ln \left[ \frac{17674560,79}{(2916,69 / 3)^3} \right] = 138,29$$

- Daerah Kritis

$$H_0 \text{ ditolak jika } W > \chi^2_{(0,05;5)} = 11,07$$

- Kesimpulan

Berdasarkan hasil komputasi,  $W = 138,29 > \chi^2_{(0,05;5)} = 11,07$  maka  $H_0$  ditolak, sehingga dapat disimpulkan bahwa ada korelasi antar variabel respon.



## LAMPIRAN 7 : Sintax Program Matlab untuk Model 1

### A. Estimasi Parameter

```
# input data
# data variabel respon : y1,y2,y3
# data variabel bebas : x
# data exposure : s
# banyak amatan : N
# banyak variabel bebas : M
# Initial Value : bo

err=1;
t=0;
while err>0.00001
    t=t+1;
    c=bo(1);
    for i=1:M
        b1(i,1)=bo(i+1);
    end
    for i=1:M
        b2(i,1)=bo(M+1+i);
    end
    for i=1:M
        b3(i,1)=bo(2*M+1+i);
    end
    NU=0;
    NH=0;
    for k=1:N
        for v=0:min(y1(k),min(y2(k),y3(k)))
            A1=(s(k)*exp(x(k,:)*b1)-c)^(y1(k)-v)/factorial(y1(k)-v);
            A2=(s(k)*exp(x(k,:)*b2)-c)^(y2(k)-v)/factorial(y2(k)-v);
            A3=(s(k)*exp(x(k,:)*b3)-c)^(y3(k)-v)/factorial(y3(k)-v);
            dA10=(s(k)*exp(x(k,:)*b1)-c)^(y1(k)-v-1)*(y1(k)-v)/
                factorial(y1(k)-v);
            dA20=(s(k)*exp(x(k,:)*b2)-c)^(y2(k)-v-1)*(y2(k)-v)/
                factorial(y2(k)-v);
            dA30=(s(k)*exp(x(k,:)*b3)-c)^(y3(k)-v-1)*(y3(k)-v)/
                factorial(y3(k)-v);
            dA100=(s(k)*exp(x(k,:)*b1)-c)^(y1(k)-v-2)*(y1(k)-v)*
                (y1(k)-v-1)/factorial(y1(k)-v);
            dA200=(s(k)*exp(x(k,:)*b2)-c)^(y2(k)-v-2)*(y2(k)-v)*
                (y2(k)-v-1)/factorial(y2(k)-v);
            dA300=(s(k)*exp(x(k,:)*b3)-c)^(y3(k)-v-2)*(y3(k)-v)*
                (y3(k)-v-1)/factorial(y3(k)-v);
            Aa=c^v/factorial(v)*A1*A2*A3;
            A=A+Aa;
            dA0a=v*c^(v-1)/factorial(v)*A1*A2*A3-c^v/factorial(v)*
                (dA10*A2*A3+dA20*A1*A3+dA30*A1*A2);
            dA1a=c^v/factorial(v)*dA10*s(k)*exp(x(k,:)*b1)*x(k,:)'*A2*A3;
            dA2a=c^v/factorial(v)*dA20*s(k)*exp(x(k,:)*b2)*x(k,:)'*A1*A3;
            dA3a=c^v/factorial(v)*dA30*s(k)*exp(x(k,:)*b3)*x(k,:)'*A1*A2;
            dA0=dA0+dA0a;
            dA1=dA1+dA1a;
            dA2=dA2+dA2a;
            dA3=dA3+dA3a;
```

```

dA11a=c^v/factorial(v)*(dA100*s(k)^2*exp(2*x(k,:)*b1)*x(k,:)'*
    x(k,:)+dA10*s(k)*exp(x(k,:)*b1)*x(k,:)'*x(k,:))*A2*A3;
dA22a=c^v/factorial(v)*(dA200*s(k)^2*exp(2*x(k,:)*b2)*x(k,:)'*
    x(k,:)+dA20*s(k)*exp(x(k,:)*b2)*x(k,:)'*x(k,:))*A1*A3;
dA33a=c^v/factorial(v)*(dA300*s(k)^2*exp(2*x(k,:)*b3)*x(k,:)'*
    x(k,:)+dA30*s(k)*exp(x(k,:)*b3)*x(k,:)'*x(k,:))*A1*A2;
dA01a=c^(v-1)*v/factorial(v)*dA10*s(k)*exp(x(k,:)*b1)*x(k,:)'*
    A2*A3-c^(v)/factorial(v)*dA100*s(k)*exp(x(k,:)*b1)*
    x(k,:) '*A2*A3-c^(v)/factorial(v)*dA10*s(k)*
    exp(x(k,:)*b1)*x(k,:) '* (dA20*A3+dA30*A2);
dA02a=c^(v-1)*v/factorial(v)*dA20*s(k)*exp(x(k,:)*b2)*x(k,:) '*
    A1*A3-c^(v)/factorial(v)*dA200*s(k)*exp(x(k,:)*b2)*
    x(k,:) '*A1*A3-c^(v)/factorial(v)*dA20*s(k)*
    exp(x(k,:)*b2)*x(k,:) '* (dA10*A3+dA30*A1);
dA03a=c^(v-1)*v/factorial(v)*dA30*s(k)*exp(x(k,:)*b3)*x(k,:) '*
    A1*A2-c^(v)/factorial(v)*dA300*s(k)*exp(x(k,:)*b3)*
    x(k,:) '*A1*A2-c^(v)/factorial(v)*dA30*s(k)*
    exp(x(k,:)*b3)*x(k,:) '* (dA10*A2+dA20*A1);
dA12a=c^(v)/factorial(v)*dA10*s(k)*exp(x(k,:)*b1)*x(k,:) '*dA20*
    s(k)*exp(x(k,:)*b2)*x(k,:)*A3;
dA13a=c^(v)/factorial(v)*dA10*s(k)*exp(x(k,:)*b1)*x(k,:) '*dA30*
    s(k)*exp(x(k,:)*b3)*x(k,:)*A2;
dA23a=c^(v)/factorial(v)*dA20*s(k)*exp(x(k,:)*b2)*x(k,:) '*dA30*
    s(k)*exp(x(k,:)*b3)*x(k,:)*A1;
dA00=dA00+dA00a;
dA11=dA11+dA11a;
dA22=dA22+dA22a;
dA33=dA33+dA33a;
dA01=dA01+dA01a;
dA02=dA02+dA02a;
dA03=dA03+dA03a;
dA12=dA12+dA12a;
dA13=dA13+dA13a;
dA23=dA23+dA23a;

end
U=[2+1/A*dA0;1/A*dA1-s(k)*exp(x(k,:)*b1)*x(k,:)';1/A*dA2-s(k)*
    exp(x(k,:)*b2)*x(k,:)';1/A*dA3-s(k)*exp(x(k,:)*b3)*x(k,:)'];
NU=NU+U;
dQ00=1/A*dA00-1/A^2*dA0^2;
dQ11=1/A*dA11-1/A^2*dA1*dA1'-s(k)*exp(x(k,:)*b1)*x(k,:) '*x(k,:);
dQ22=1/A*dA22-1/A^2*dA2*dA2'-s(k)*exp(x(k,:)*b2)*x(k,:) '*x(k,:);
dQ33=1/A*dA33-1/A^2*dA3*dA3'-s(k)*exp(x(k,:)*b3)*x(k,:) '*x(k,:);
dQ01=1/A*dA01-1/A^2*dA0*dA1;
dQ02=1/A*dA02-1/A^2*dA0*dA2;
dQ03=1/A*dA03-1/A^2*dA0*dA3;
dQ12=1/A*dA12-1/A^2*dA1*dA2';
dQ13=1/A*dA13-1/A^2*dA1*dA3';
dQ23=1/A*dA23-1/A^2*dA2*dA3';
H=[dQ00,dQ01',dQ02',dQ03';dQ01,dQ11,dQ12,dQ13;dQ02,dQ12,dQ22,dQ23];
dQ03,dQ13',dQ23',dQ33];
NH=NH+H;

end
b=bo-inv(NH)*NU;
err=norm(b-bo);
bo=b;
fprintf('Koefisien Regresi pada Iterasi ke :%d\n',t);
fprintf('%f\n',b);
end

```

## B. Pengujian Hipotesis

```
# berdasarkan hasil estimasi Parameter pada populasi (b)
# berdasarkan hasil estimasi Parameter pada Ho (ba)

NHI=inv(-NH);
seb=sqrt(diag(NHI));
disp(seb);

lnQ=0;
lnQo=0;
for k=1:N
    for v=0:min(y1(k),min(y2(k),y3(k)))
        A1=(s(k)*exp(x(k,:)*b(2:M+1))-b(1))^(y1(k)-v)/factorial(y1(k)-v);
        A2=(s(k)*exp(x(k,:)*b(M+2:2*M+1))-b(1))^(y2(k)-v)/
            factorial(y2(k)-v);
        A3=(s(k)*exp(x(k,:)*b(2*M+2:3*M+1))-b(1))^(y3(k)-v)/
            factorial(y3(k)-v);
        A1o=(s(k)*exp(ba(2))-ba(1))^(y1(k)-v)/factorial(y1(k)-v);
        A2o=(s(k)*exp(ba(3))-ba(1))^(y2(k)-v)/factorial(y2(k)-v);
        A3o=(s(k)*exp(ba(4))-ba(1))^(y3(k)-v)/factorial(y3(k)-v);
        Aa=b(1)^v/factorial(v)*A1*A2*A3;
        Aao=ba(1)^v/factorial(v)*A1o*A2o*A3o;
        A=A+Aa;
        Ao=Ao+Aao;
    end
    lnA=log(A);
    xb=s(k)*exp(x(k,:)*b(2:M+1))+s(k)*exp(x(k,:)*b(M+2:2*M+1))+
        s(k)*exp(x(k,:)*b(2*M+2:3*M+1));
    Q=2*b(1)-xb+lnA;
    lnQ=lnQ+Q;
    lnAo=log(Ao);
    xbo=s(k)*exp(ba(2))+s(k)*exp(ba(3))+s(k)*exp(ba(4));
    Qo=2*ba(1)-xbo+lnAo;
    lnQo=lnQo+Qo;
end
aic=-2*lnQ+2*(3*M+1);

# uji Parameter Parsial
for j=1:3*M+1
    Z(j,1)=b(j)/seb(j);
end

# uji Parameter serentak
G=2*(lnQ-lnQo);
```



## LAMPIRAN 8 : Sintax Program Matlab untuk Model 2

### A. Estimasi Parameter

```
# input data
# data variabel respon : y1,y2,y3
# data variabel bebas : x
# data exposure : s
# banyak amatan : N
# banyak variabel bebas : M
# Initial Value : bo

err=1;
t=0;
while err>0.00001
    t=t+1;
    for i=1:M
        b0(i,1)=bo(i);
    end
    for i=1:M
        b1(i,1)=bo(M+i);
    end
    for i=1:M
        b2(i,1)=bo(2*M+i);
    end
    for i=1:M
        b3(i,1)=bo(3*M+i);
    end
    NU=0;
    NH=0;
    for k=1:N
        for v=0:min(y1(k),min(y2(k),y3(k)))
            A0=(s(k)*exp(x(k,:)*b0))^v/factorial(v);
            A1=(s(k)*exp(x(k,:)*b1))^(y1(k)-v)/factorial(y1(k)-v);
            A2=(s(k)*exp(x(k,:)*b2))^(y2(k)-v)/factorial(y2(k)-v);
            A3=(s(k)*exp(x(k,:)*b3))^(y3(k)-v)/factorial(y3(k)-v);
            dAo0=(s(k)*exp(x(k,:)*b0))^v*v*x(k,:)/factorial(v);
            dA10=(s(k)*exp(x(k,:)*b1))^(y1(k)-v)*(y1(k)-v)*x(k,:)/factorial(y1(k)-v);
            dA20=(s(k)*exp(x(k,:)*b2))^(y2(k)-v)*(y2(k)-v)*x(k,:)/factorial(y2(k)-v);
            dA30=(s(k)*exp(x(k,:)*b3))^(y3(k)-v)*(y3(k)-v)*x(k,:)/factorial(y3(k)-v);
            dAo00=(s(k)*exp(x(k,:)*b0))^v*v^2*x(k,:)*x(k,:)/factorial(v);
            dA100=(s(k)*exp(x(k,:)*b1))^(y1(k)-v)*(y1(k)-v)^2*x(k,:)*x(k,:)/factorial(y1(k)-v);
            dA200=(s(k)*exp(x(k,:)*b2))^(y2(k)-v)*(y2(k)-v)^2*x(k,:)*x(k,:)/factorial(y2(k)-v);
            dA300=(s(k)*exp(x(k,:)*b3))^(y3(k)-v)*(y3(k)-v)^2*x(k,:)*x(k,:)/factorial(y3(k)-v);
```

```

        Aa=A0*A1*A2*A3;
        A=A+Aa;
        dA0a=dAo0*A1*A2*A3;
        dA1a=dA10*A0*A2*A3;
        dA2a=dA20*A0*A1*A3;
        dA3a=dA30*A0*A2*A1;
        dA0=dA0+dA0a;
        dA1=dA1+dA1a;
        dA2=dA2+dA2a;
        dA3=dA3+dA3a;
        dA00a=dAo00*A1*A2*A3;
        dA11a=dA100*A0*A2*A3;
        dA22a=dA200*A0*A1*A3;
        dA33a=dA300*A0*A2*A1;
        dA01a=dAo0*dA10'*A2*A3;
        dA02a=dAo0*A1*dA20'*A3;
        dA03a=dAo0*A1*A2*dA30';
        dA12a=dA10*A0*dA20'*A3;
        dA13a=dA10*A0*A2*dA30';
        dA23a=dA20*A0*A1*dA30';
        dA00=dA00+dA00a;
        dA11=dA11+dA11a;
        dA22=dA22+dA22a;
        dA33=dA33+dA33a;
        dA01=dA01+dA01a;
        dA02=dA02+dA02a;
        dA03=dA03+dA03a;
        dA12=dA12+dA12a;
        dA13=dA13+dA13a;
        dA23=dA23+dA23a;

    end
    dQ0=1/A*dA0-s(k)*exp(x(k,:)*b0)*x(k,:);
    dQ1=1/A*dA1-s(k)*exp(x(k,:)*b1)*x(k,:);
    dQ2=1/A*dA2-s(k)*exp(x(k,:)*b2)*x(k,:);
    dQ3=1/A*dA3-s(k)*exp(x(k,:)*b3)*x(k,:);
    U=[dQ0;dQ1;dQ2;dQ3];
    NU=NU+U;
    dQ00=1/A*dA00-1/A^2*dA0*dA0'-s(k)*exp(x(k,:)*b0)*x(k,:)'*x(k,:);
    dQ11=1/A*dA11-1/A^2*dA1*dA1'-s(k)*exp(x(k,:)*b1)*x(k,:)'*x(k,:);
    dQ22=1/A*dA22-1/A^2*dA2*dA2'-s(k)*exp(x(k,:)*b2)*x(k,:)'*x(k,:);
    dQ33=1/A*dA33-1/A^2*dA3*dA3'-s(k)*exp(x(k,:)*b3)*x(k,:)'*x(k,:);
    dQ01=1/A*dA01-1/A^2*dA0*dA1';
    dQ02=1/A*dA02-1/A^2*dA0*dA2';
    dQ03=1/A*dA03-1/A^2*dA0*dA3';
    dQ12=1/A*dA12-1/A^2*dA1*dA2';
    dQ13=1/A*dA13-1/A^2*dA1*dA3';
    dQ23=1/A*dA23-1/A^2*dA2*dA3';
    H=[dQ00,dQ01,dQ02,dQ03;dQ01,dQ11,dQ12,dQ13;dQ02,dQ12,dQ22,dQ23;
        dQ03,dQ13,dQ23,dQ33];
    NH=NH+H;

    end
    b=bo-inv(NH)*NU;
    err=norm(b-bo);
    bo=b;
    fprintf('Koefisien Regresi pada Iterasi ke :%d\n',t);
    fprintf('%f\n',b);
end

```



## B. Pengujian Hipotesis

```
# berdasarkan hasil estimasi Parameter pada populasi (b)
# berdasarkan hasil estimasi Parameter pada Ho (ba)

NHI=inv(-NH);
seb=sqrt(diag(NHI));
disp(seb);

lnQ=0;
lnQo=0;
for k=1:N
    for v=0:min(y1(k),min(y2(k),y3(k)))
        A0=(s(k)*exp(x(k,:)*b(1:M)))^v/factorial(v);
        A1=(s(k)*exp(x(k,:)*b(M+1:2*M)))^(y1(k)-v)/factorial(y1(k)-v);
        A2=(s(k)*exp(x(k,:)*b(2*M+1:3*M)))^(y2(k)-v)/factorial(y2(k)-v);
        A3=(s(k)*exp(x(k,:)*b(3*M+1:4*M)))^(y3(k)-v)/factorial(y3(k)-v);
        A0o=(s(k)*exp(ba(1)))^v/factorial(v);
        A1o=(s(k)*exp(ba(2)))^(y1(k)-v)/factorial(y1(k)-v);
        A2o=(s(k)*exp(ba(3)))^(y2(k)-v)/factorial(y2(k)-v);
        A3o=(s(k)*exp(ba(4)))^(y3(k)-v)/factorial(y3(k)-v);
        Aa=A0*A1*A2*A3;
        A=A+Aa;
        Aao=A0o*A1o*A2o*A3o;
        Ao=Ao+Aao;
    end
    lnA=log(A);
    xb=s(k)*exp(x(k,:)*b(1:M))+s(k)*exp(x(k,:)*b(M+1:2*M))+
        s(k)*exp(x(k,:)*b(2*M+1:3*M))+s(k)*exp(x(k,:)*b(3*M+1:4*M));
    Q=lnA-xb;
    lnQ=lnQ+Q;
    lnAo=log(Ao);
    xbo=s(k)*exp(ba(1))+s(k)*exp(ba(2))+s(k)*exp(ba(3))+
        s(k)*exp(ba(4));
    Qo=lnAo-xbo;
    lnQo=lnQo+Qo;
end
aic=-2*lnQ+2*4*M;

# uji Parameter Parsial
for j=1:4*M
    Z(j,1)=b(j)/seb(j);
end

# uji Parameter serentak
G=2*(lnQ-lnQo);
```



## LAMPIRAN 9 : Sintax Program Matlab untuk Model 3

### A. Estimasi Parameter

```
# input data
# data variabel respon : y1,y2,y3
# data variabel bebas : x
# data exposure : s
# data lintang bujur : u1,u2
# banyak amatan : N
# banyak variabel bebas : M
# nilai bandwidth optimum : h
# Initial Value : bo

for i=1:N
    for j=i:N
        d(i,j)=sqrt((u1(i)-u1(j))^2+(u2(i)-u2(j))^2);
        d(j,i)=d(i,j);
    end
end
for l=1:N
    for i=1:N
        for j=i:N
            w(i,j)=exp(-1/2*(d(i,j)/h(l))^2);
            w(j,i)=w(i,j);
        end
    end
    t=0;
    err=1;
    while err>0.00001
        t=t+1;
        c=bo(1);
        for i=1:M
            b1(i,1)=bo(i+1);
        end
        for i=1:M
            b2(i,1)=bo(M+1+i);
        end
        for i=1:M
            b3(i,1)=bo(2*M+1+i);
        end
        NU=0;
        NH=0;
        for k=1:N
            for v=0:min(y1(k),min(y2(k),y3(k)))
                A1=(s(k)*exp(x(k,:)*b1)-c)^(y1(k)-v)/factorial(y1(k)-v);
                A2=(s(k)*exp(x(k,:)*b2)-c)^(y2(k)-v)/factorial(y2(k)-v);
                A3=(s(k)*exp(x(k,:)*b3)-c)^(y3(k)-v)/factorial(y3(k)-v);
                dA10=(s(k)*exp(x(k,:)*b1)-c)^(y1(k)-v-1)*(y1(k)-v)/
                    factorial(y1(k)-v);
                dA20=(s(k)*exp(x(k,:)*b2)-c)^(y2(k)-v-1)*(y2(k)-v)/
                    factorial(y2(k)-v);
                dA30=(s(k)*exp(x(k,:)*b3)-c)^(y3(k)-v-1)*(y3(k)-v)/
                    factorial(y3(k)-v);
                dA100=(s(k)*exp(x(k,:)*b1)-c)^(y1(k)-v-2)*(y1(k)-v)*
                    (y1(k)-v-1)/factorial(y1(k)-v);
                dA200=(s(k)*exp(x(k,:)*b2)-c)^(y2(k)-v-2)*(y2(k)-v)*
                    (y2(k)-v-1)/factorial(y2(k)-v);
```

```

dA300=(s(k)*exp(x(k,:)*b3)-c)^(y3(k)-v-2)*(y3(k)-v)*
      (y3(k)-v-1)/factorial(y3(k)-v);
Aa=c^v/factorial(v)*A1*A2*A3;
A=A+Aa;
dA0a=v*c^(v-1)/factorial(v)*A1*A2*A3-c^v/
      factorial(v)*(dA10*A2*A3+dA20*A1*A3+dA30*A1*A2);
dA1a=c^v/factorial(v)*dA10*s(k)*exp(x(k,:)*b1)*x(k,:)'*
      A2*A3;
dA2a=c^v/factorial(v)*dA20*s(k)*exp(x(k,:)*b2)*x(k,:)'*
      A1*A3;
dA3a=c^v/factorial(v)*dA30*s(k)*exp(x(k,:)*b3)*x(k,:)'*
      A1*A2;
dA0=dA0+dA0a;
dA1=dA1+dA1a;
dA2=dA2+dA2a;
dA3=dA3+dA3a;
dA00a=c^(v-2)*(v-1)*v/factorial(v)*A1*A2*A3-2*c^(v-1)*v/
      factorial(v)*(dA10*A2*A3+dA20*A1*A3+dA30*A1*A2)+ c^v/
      factorial(v)*(dA100*A2*A3+dA200*A1*A3+dA300*A1*A2+
      dA10*dA20*A3+dA10*dA30*A2+dA20*dA10*A3+dA20*dA30*A1+
      dA30*dA10*A2+dA30*dA20*A1);
dA11a=c^v/factorial(v)*(dA100*s(k)^2*exp(2*x(k,:)*b1)*
      x(k,:)'*x(k,:)+dA10*s(k)*exp(x(k,:)*b1)*x(k,:)'*
      x(k,:))*A2*A3;
dA22a=c^v/factorial(v)*(dA200*s(k)^2*exp(2*x(k,:)*b2)*
      x(k,:)'*x(k,:)+dA20*s(k)*exp(x(k,:)*b2)*x(k,:)'*
      x(k,:))*A1*A3;
dA33a=c^v/factorial(v)*(dA300*s(k)^2*exp(2*x(k,:)*b3)*
      x(k,:)'*x(k,:)+dA30*s(k)*exp(x(k,:)*b3)*x(k,:)'*
      x(k,:))*A1*A2;
dA01a=c^(v-1)*v/factorial(v)*dA10*s(k)*exp(x(k,:)*b1)*
      x(k,:)'*A2*A3-c^(v)/factorial(v)*dA100*s(k)*
      exp(x(k,:)*b1)*x(k,:)'*A2*A3-c^(v)/factorial(v)*dA10*
      s(k)*exp(x(k,:)*b1)*x(k,:)'*(dA20*A3+dA30*A2);
dA02a=c^(v-1)*v/factorial(v)*dA20*s(k)*exp(x(k,:)*b2)*
      x(k,:)'*A1*A3-c^(v)/factorial(v)*dA200*s(k)*
      exp(x(k,:)*b2)*x(k,:)'*A1*A3-c^(v)/factorial(v)*dA20*
      s(k)*exp(x(k,:)*b2)*x(k,:)'*(dA10*A3+dA30*A1);
dA03a=c^(v-1)*v/factorial(v)*dA30*s(k)*exp(x(k,:)*b3)*
      x(k,:)'*A1*A2-c^(v)/factorial(v)*dA300*s(k)*
      exp(x(k,:)*b3)*x(k,:)'*A1*A2-c^(v)/factorial(v)*dA30*
      s(k)*exp(x(k,:)*b3)*x(k,:)'*(dA10*A2+dA20*A1);
dA12a=c^(v)/factorial(v)*dA10*s(k)*exp(x(k,:)*b1)*x(k,:)'*
      dA20*s(k)*exp(x(k,:)*b2)*x(k,:)*A3;
dA13a=c^(v)/factorial(v)*dA10*s(k)*exp(x(k,:)*b1)*x(k,:)'*
      dA30*s(k)*exp(x(k,:)*b3)*x(k,:)*A2;
dA23a=c^(v)/factorial(v)*dA20*s(k)*exp(x(k,:)*b2)*x(k,:)'*
      dA30*s(k)*exp(x(k,:)*b3)*x(k,:)*A1;
dA00=dA00+dA00a;
dA11=dA11+dA11a;
dA22=dA22+dA22a;
dA33=dA33+dA33a;
dA01=dA01+dA01a;
dA02=dA02+dA02a;
dA03=dA03+dA03a;
dA12=dA12+dA12a;
dA13=dA13+dA13a;
dA23=dA23+dA23a;
end

```

```

U=[w(l,k)*(2+1/A*dA0);w(l,k)*(1/A*dA1-s(k)*exp(x(k,:)*b1)*
    x(k,:)'); w(l,k)*(1/A*dA2-s(k)*exp(x(k,:)*b2)*x(k,:)');
    w(l,k)*(1/A*dA3-s(k)*exp(x(k,:)*b3)*x(k,:)')];
NU=NU+U;
dQ00=w(l,k)*(1/A*dA00-1/A^2*dA0^2);
dQ11=w(l,k)*(1/A*dA11-1/A^2*dA1*dA1'-s(k)*exp(x(k,:)*b1)*
    x(k,:)'*x(k,:));
dQ22=w(l,k)*(1/A*dA22-1/A^2*dA2*dA2'-s(k)*exp(x(k,:)*b2)*
    x(k,:)'*x(k,:));
dQ33=w(l,k)*(1/A*dA33-1/A^2*dA3*dA3'-s(k)*exp(x(k,:)*b3)*
    x(k,:)'*x(k,:));
dQ01=w(l,k)*(1/A*dA01-1/A^2*dA0*dA1);
dQ02=w(l,k)*(1/A*dA02-1/A^2*dA0*dA2);
dQ03=w(l,k)*(1/A*dA03-1/A^2*dA0*dA3);
dQ12=w(l,k)*(1/A*dA12-1/A^2*dA1*dA2');
dQ13=w(l,k)*(1/A*dA13-1/A^2*dA1*dA3');
dQ23=w(l,k)*(1/A*dA23-1/A^2*dA2*dA3');
H=[dQ00,dQ01',dQ02',dQ03';dQ01,dQ11,dQ12,dQ13;
    dQ02,dQ12,dQ22,dQ23;dQ03,dQ13',dQ23',dQ33];
NH=NH+H;
end
b(:,l)=bo-inv(NH)*NU;
err=norm(b(:,l)-bo);
bo=b(:,l);
end
NHI=inv(-NH);
seb(:,l)=sqrt(diag(NHI));
y1hatm(:,l)=diag(s)*exp(x*b(2:M+1,l));
y2hatm(:,l)=diag(s)*exp(x*b(M+2:2*M+1,l));
y3hatm(:,l)=diag(s)*exp(x*b(2*M+2:3*M+1,l));
wd=diag(w(:,l));
dy1=diag(y1hatm(:,l));
dy2=diag(y2hatm(:,l));
dy3=diag(y3hatm(:,l));
r1(l,:)=x(l,:)*inv(x'*wd*dy1*x)*(x'*wd*dy1);
r2(l,:)=x(l,:)*inv(x'*wd*dy2*x)*(x'*wd*dy2);
r3(l,:)=x(l,:)*inv(x'*wd*dy3*x)*(x'*wd*dy3);
end
hatm1=trace(r1)+trace(r2)+trace(r3);
hatm=hatm1+hatm1/(3*M);
disp(b);

```

## B. Pengujian Hipotesis

```
# berdasarkan hasil estimasi Parameter pada populasi (b)
# berdasarkan hasil estimasi Parameter pada Ho (ba)
# berdasarkan nilai standar error masing-masing lokasi (seb)

lnQ=0;
lnQo=0;
for k=1:N
    for v=0:min(y1(k),min(y2(k),y3(k)))
        A1=(s(k)*exp(x(k,:)*b(2:M+1,k))-b(1,k)^(y1(k)-v)/
            factorial(y1(k)-v);
        A2=(s(k)*exp(x(k,:)*b(M+2:2*M+1,k))-b(1,k)^(y2(k)-v)/
            factorial(y2(k)-v);
        A3=(s(k)*exp(x(k,:)*b(2*M+2:3*M+1,k))-b(1,k)^(y3(k)-v)/
            factorial(y3(k)-v);
        A1o=(s(k)*exp(ba(2,k))-ba(1,k)^(y1(k)-v)/factorial(y1(k)-v);
        A2o=(s(k)*exp(ba(3,k))-ba(1,k)^(y2(k)-v)/factorial(y2(k)-v);
        A3o=(s(k)*exp(ba(4,k))-ba(1,k)^(y3(k)-v)/factorial(y3(k)-v);
        Aa=b(1,k)^v/factorial(v)*A1*A2*A3;
        Aao=ba(1,k)^v/factorial(v)*A1o*A2o*A3o;
        A=A+Aa;
        Ao=Ao+Aao;
    end
    lnA=log(A);
    xb=s(k)*exp(x(k,:)*b(2:M+1,k))+s(k)*exp(x(k,:)*
        b(M+2:2*M+1,k))+s(k)*exp(x(k,:)*b(2*M+2:3*M+1,k));
    Q=2*b(1,k)-xb+lnA;
    lnQ=lnQ+Q;
    lnAo=log(Ao);
    xbo=s(k)*exp(ba(2,k))+s(k)*exp(ba(3,k))+s(k)*exp(ba(4,k));
    Qo=2*ba(1,k)-xbo+lnAo;
    lnQo=lnQo+Qo;
end
for i=1:N
    for j=1:3*M+1
        Z(j,i)=b(j,i)/seb(j,i);
    end
end
aic=-2*lnQ+2*(hatm);
G=2*(lnQ-lnQo);
```

## LAMPIRAN 10 : Sintax Program Matlab untuk Model 4

### A. Estimasi Parameter

```
# input data
# data variabel respon : y1,y2,y3
# data variabel bebas : x
# data exposure : s
# data lintang bujur : u1,u2
# banyak amatan : N
# banyak variabel bebas : M
# nilai bandwidth optimum : h
# initial value : bo

for i=1:N
    for j=i:N
        d(i,j)=sqrt((u1(i)-u1(j))^2+(u2(i)-u2(j))^2);
        d(j,i)=d(i,j);
    end
end
for l=1:N
    for i=1:N
        for j=i:N
            w(i,j)=exp(-1/2*(d(i,j)/h(l))^2);
            w(j,i)=w(i,j);
        end
    end
    t=0;
    err=1;
    while err>0.00001
        t=t+1;
        for i=1:M
            b0(i,1)=bo(i);
        end
        for i=1:M
            b1(i,1)=bo(M+i);
        end
        for i=1:M
            b2(i,1)=bo(2*M+i);
        end
        for i=1:M
            b3(i,1)=bo(3*M+i);
        end
        NU=0;
        NH=0;
        for k=1:N
            for v=0:min(y1(k),min(y2(k),y3(k)))
                A0=(s(k)*exp(x(k,:)*b0))^v/factorial(v);
                A1=(s(k)*exp(x(k,:)*b1))^(y1(k)-v)/factorial(y1(k)-v);
                A2=(s(k)*exp(x(k,:)*b2))^(y2(k)-v)/factorial(y2(k)-v);
                A3=(s(k)*exp(x(k,:)*b3))^(y3(k)-v)/factorial(y3(k)-v);
                dAo0=(s(k)*exp(x(k,:)*b0))^v*v*x(k,:)/factorial(v);
                dA10=(s(k)*exp(x(k,:)*b1))^(y1(k)-v)*(y1(k)-v)*x(k,:)/
                    factorial(y1(k)-v);
                dA20=(s(k)*exp(x(k,:)*b2))^(y2(k)-v)*(y2(k)-v)*
                    x(k,:)/factorial(y2(k)-v);
                dA30=(s(k)*exp(x(k,:)*b3))^(y3(k)-v)*(y3(k)-v)*
                    x(k,:)/factorial(y3(k)-v);
```

```

dAo00=(s(k)*exp(x(k,:)*b0))^v*v^2*x(k,:)'*x(k,:)/
factorial(v);
dA100=(s(k)*exp(x(k,:)*b1))^(y1(k)-v)*(y1(k)-v)^2*
x(k,:)'*x(k,:)/factorial(y1(k)-v);
dA200=(s(k)*exp(x(k,:)*b2))^(y2(k)-v)*(y2(k)-v)^2*
x(k,:)'*x(k,:)/factorial(y2(k)-v);
dA300=(s(k)*exp(x(k,:)*b3))^(y3(k)-v)*(y3(k)-v)^2*
x(k,:)'*x(k,:)/factorial(y3(k)-v);
Aa=A0*A1*A2*A3;
A=A+Aa;
dA0a=dAo0*A1*A2*A3;
dA1a=dA10*A0*A2*A3;
dA2a=dA20*A0*A1*A3;
dA3a=dA30*A0*A2*A1;
dA0=dA0+dA0a;
dA1=dA1+dA1a;
dA2=dA2+dA2a;
dA3=dA3+dA3a;
dA00a=dAo00*A1*A2*A3;
dA11a=dA100*A0*A2*A3;
dA22a=dA200*A0*A1*A3;
dA33a=dA300*A0*A2*A1;
dA01a=dAo0*dA10'*A2*A3;
dA02a=dAo0*A1*dA20'*A3;
dA03a=dAo0*A1*A2*dA30';
dA12a=dA10*A0*dA20'*A3;
dA13a=dA10*A0*A2*dA30';
dA23a=dA20*A0*A1*dA30';
dA00=dA00+dA00a;
dA11=dA11+dA11a;
dA22=dA22+dA22a;
dA33=dA33+dA33a;
dA01=dA01+dA01a;
dA02=dA02+dA02a;
dA03=dA03+dA03a;
dA12=dA12+dA12a;
dA13=dA13+dA13a;
dA23=dA23+dA23a;
end
dQ0=1/A*dA0-s(k)*exp(x(k,:)*b0)*x(k,:)';
dQ1=1/A*dA1-s(k)*exp(x(k,:)*b1)*x(k,:)';
dQ2=1/A*dA2-s(k)*exp(x(k,:)*b2)*x(k,:)';
dQ3=1/A*dA3-s(k)*exp(x(k,:)*b3)*x(k,:)';
U=[w(1,k)*dQ0;w(1,k)*dQ1;w(1,k)*dQ2;w(1,k)*dQ3];
NU=NU+U;
dQ00=w(1,k)*(1/A*dA00-1/A^2*dA0*dA0'-s(k)*exp(x(k,:)*b0)*
x(k,:)'*x(k,:));
dQ11=w(1,k)*(1/A*dA11-1/A^2*dA1*dA1'-s(k)*exp(x(k,:)*b1)*
x(k,:)'*x(k,:));
dQ22=w(1,k)*(1/A*dA22-1/A^2*dA2*dA2'-s(k)*exp(x(k,:)*b2)*
x(k,:)'*x(k,:));
dQ33=w(1,k)*(1/A*dA33-1/A^2*dA3*dA3'-s(k)*exp(x(k,:)*b3)*
x(k,:)'*x(k,:));
dQ01=w(1,k)*(1/A*dA01-1/A^2*dA0*dA1');
dQ02=w(1,k)*(1/A*dA02-1/A^2*dA0*dA2');
dQ03=w(1,k)*(1/A*dA03-1/A^2*dA0*dA3');
dQ12=w(1,k)*(1/A*dA12-1/A^2*dA1*dA2');
dQ13=w(1,k)*(1/A*dA13-1/A^2*dA1*dA3');
dQ23=w(1,k)*(1/A*dA23-1/A^2*dA2*dA3');

```



```

        H=[dQ00,dQ01,dQ02,dQ03;dQ01,dQ11,dQ12,dQ13;dQ02,dQ12,dQ22,
            dQ23;dQ03,dQ13,dQ23,dQ33];
        NH=NH+H;
    end
    b(:,l)=bo-inv(NH)*NU;
    err=norm(b(:,l)-bo);
    bo=b(:,l);
end
NHI=inv(-NH);
seb(:,l)=sqrt(diag(NHI));
y1hatm(:,l)=diag(s)*exp(x*b(M+1:2*M,l))+diag(s)*
    exp(x*b(1:M,l));
y2hatm(:,l)=diag(s)*exp(x*b(2*M+1:3*M,l))+diag(s)*
    exp(x*b(1:M,l));
y3hatm(:,l)=diag(s)*exp(x*b(3*M+1:4*M,l))+diag(s)*
    exp(x*b(1:M,l));
wd=diag(w(:,l));
dy1=diag(y1hatm(:,l));
dy2=diag(y2hatm(:,l));
dy3=diag(y3hatm(:,l));
r1(l,:)=x(l,:)*inv(x'*wd*dy1*x)*(x'*wd*dy1);
r2(l,:)=x(l,:)*inv(x'*wd*dy2*x)*(x'*wd*dy2);
r3(l,:)=x(l,:)*inv(x'*wd*dy3*x)*(x'*wd*dy3);
end
hatm1=trace(r1)+trace(r2)+trace(r3);
hatm=hatm1+hatm1/(3*M);
disp(b);

```

## B. Pengujian Hipotesis

```
# berdasarkan hasil estimasi Parameter pada populasi (b)
# berdasarkan hasil estimasi Parameter pada Ho (ba)
# berdasarkan nilai standar error masing-masing lokasi (seb)

lnQ=0;
lnQo=0;
for k=1:N
    for v=0:min(y1(k),min(y2(k),y3(k)))
        A0=(s(k)*exp(x(k,:)*b(1:M,k)))^v/factorial(v);
        A1=(s(k)*exp(x(k,:)*b(M+1:2*M,k)))^(y1(k)-v)/factorial(y1(k)-v);
        A2=(s(k)*exp(x(k,:)*b(2*M+1:3*M,k)))^(y2(k)-v)/
            factorial(y2(k)-v);
        A3=(s(k)*exp(x(k,:)*b(3*M+1:4*M,k)))^(y3(k)-v)/
            factorial(y3(k)-v);
        A0o=(s(k)*exp(ba(1,k)))^v/factorial(v);
        A1o=(s(k)*exp(ba(2,k)))^(y1(k)-v)/factorial(y1(k)-v);
        A2o=(s(k)*exp(ba(3,k)))^(y2(k)-v)/factorial(y2(k)-v);
        A3o=(s(k)*exp(ba(4,k)))^(y3(k)-v)/factorial(y3(k)-v);

        Aa=A0*A1*A2*A3;
        A=A+Aa;
        Aao=A0o*A1o*A2o*A3o;
        Ao=Ao+Aao;
    end
    lnA=log(A);
    xb=s(k)*exp(x(k,:)*b(1:M,k))+s(k)*exp(x(k,:)*b(M+1:2*M,k))+
        s(k)*exp(x(k,:)*b(2*M+1:3*M,k))+s(k)*exp(x(k,:)*b(3*M+1:4*M,k));
    Q=lnA-xb;
    lnQ=lnQ+Q;
    lnAo=log(Ao);
    xbo=s(k)*exp(ba(1,k))+s(k)*exp(ba(2,k))+s(k)*exp(ba(3,k))+
        s(k)*exp(ba(4,k));
    Qo=lnAo-xbo;
    lnQo=lnQo+Qo;
end
for k=1:N
    for j=1:4*M
        Z(j,k)=b(j,k)/seb(j,k);
    end
end
aic=-2*lnQ+2*(hatm);
G=2*(lnQ-lnQo);
```

## LAMPIRAN 11 : Uji Heterogenitas Spasial

Dalam pemodelan data spasial sangat dimungkinkan adanya variasi secara kewilayahan yang disebut dengan heterogenitas spasial yang menunjukkan adanya keberagaman dalam hubungan secara kewilayahan. Untuk menentukan adanya heterogenitas spasial dengan formula hipotesis

$$H_0 : \Sigma_1 = \Sigma_2 = \dots = \Sigma_n = \Sigma$$

$$H_1 : \text{paling tidak ada satu } \Sigma_i \neq \Sigma \quad ; i = 1, 2, \dots, n$$

Dapat dilakukan dengan metode *glejser*, yaitu melakukan uji serentak dari model regresi sebagai berikut :

$$\hat{\varepsilon}_{ih}^2 = \gamma_{h0} + \gamma_{h1}x_{ih} + \gamma_{h2}x_{ih} + \dots + \gamma_{hk}x_{ih} \quad ; h = 1, 2, \dots, p \quad ; i = 1, 2, \dots, n$$

- Formulasi Hipotesis

$$H_0 : \gamma_{h1} = \gamma_{h2} = \dots = \gamma_{hk} = 0 \quad ; h = 0, 1, 2, \dots, p$$

$$H_1 : \text{Paling sedikit ada satu } \gamma_{hl} \neq 0 \quad ; h = 0, 1, 2, \dots, p \quad ; l = 1, 2, \dots, k$$

- Tingkat Signifikan ( $\alpha$ ) = 0,05
- Statistik Uji

$$G = -[n - k - 1 - \frac{1}{2}(p - k + 1)] \ln \left( \frac{|\widehat{\Sigma}_{\Omega}|}{|\widehat{\Sigma}_{\omega}|} \right) \sim \chi_{pk}^2$$

Dimana  $\Sigma_{\omega}$  adalah matriks varian kovarian di bawah  $H_0$  dan  $\Sigma_{\Omega}$  adalah matriks varian kovarian di bawah  $H_1$  (Johnson dan Wichern, 2007).

- Komputasi

$$\begin{aligned} G &= -[35 - 10 - 1 - \frac{1}{2}(3 - 10 + 1)] \ln \left( \frac{\begin{vmatrix} 0,0154 & 0,0059 & 0,0009 \\ 0,0059 & 0,0080 & 0,0023 \\ 0,0009 & 0,0023 & 0,0149 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 0,0277 & 0,0175 & 0,0017 \\ 0,0175 & 0,0238 & 0,0022 \\ 0,0017 & 0,0022 & 0,0204 \end{vmatrix}} \right) \\ &= -27 \cdot \ln(0,174) \\ &= 47,210 \end{aligned}$$

- Daerah Kritis

$H_0$  ditolak jika  $G > \chi^2_{(0,05;30)} = 43,77$

- Kesimpulan

Berdasarkan hasil komputasi diperoleh nilai statistik uji  $G = 47,210$ , maka  $H_0$  ditolak. Hal itu berarti ada heterogenitas spasial dari data.

**LAMPIRAN 12 : Nilai Bandwidth Optimum pada Model GWMPR**

Lokasi	Kovariansi Konstan	Kovariansi Fungsi dari Var Bebas
1	0,62	0,53
2	0,58	0,68
3	1,12	1,81
4	0,41	0,25
5	0,46	0,24
6	0,63	0,85
7	0,22	0,27
8	2,51	0,2
9	2,29	2,22
10	0,25	0,21
11	0,40	1,17
12	0,22	0,3
13	2,40	2,35
14	0,46	0,64
15	0,27	0,42
16	0,48	0,36
17	0,53	2,11
18	0,42	0,39

Lokasi	Kovariansi Konstan	Kovariansi Fungsi dari Var Bebas
19	0,40	1,31
20	0,33	0,36
21	0,21	1,22
22	0,30	0,22
23	0,25	0,38
24	0,41	0,28
25	2,47	2,5
26	0,35	0,28
27	0,46	0,56
28	0,56	0,38
29	0,58	0,39
30	2,08	1,18
31	0,21	0,95
32	0,27	0,43
33	0,26	0,24
34	2,20	2,26
35	1,12	2,07



**LAMPIRAN 13 : Hasil Estimasi Parameter dan Nilai Statistik Uji Model  
GWMPR dengan Kovariansi Merupakan Konstanta**

Lokasi	Par	IBU			NEONTAL DINI			NEONATAL LANJUT		
		Est	Se	Z	Est	Se	Z	Est	Se	Z
1	$\beta_0$	-9,178	2,767	-3,317	-4,684	1,166	-4,019	-6,667	2,482	-2,686
	$\beta_1$	0,031	0,035	0,897	0,018	0,015	1,255	-0,016	0,032	-0,500
	$\beta_2$	-0,007	0,031	-0,227	-0,032	0,013	-2,475	0,025	0,034	0,751
	$\beta_4$	0,034	0,078	0,437	0,060	0,032	1,847	0,141	0,070	2,006
	$\beta_6$	-0,002	0,003	-0,765	0,002	0,001	1,639	-0,005	0,003	-2,122
	$\beta_7$	-0,001	0,007	-0,198	0,002	0,003	0,830	-0,003	0,005	-0,491
	$\beta_9$	0,014	0,017	0,816	0,017	0,008	2,172	-0,034	0,016	-2,180
2	$\beta_0$	-9,074	2,104	-4,312	-4,619	0,901	-5,129	-6,382	1,892	-3,373
	$\beta_1$	0,031	0,026	1,165	0,016	0,011	1,461	-0,017	0,024	-0,710
	$\beta_2$	-0,005	0,022	-0,230	-0,032	0,009	-3,454	0,023	0,024	0,952
	$\beta_4$	0,035	0,063	0,555	0,060	0,026	2,356	0,129	0,055	2,344
	$\beta_6$	-0,003	0,003	-1,186	0,003	0,001	2,037	-0,005	0,002	-2,092
	$\beta_7$	-0,001	0,005	-0,273	0,003	0,002	1,538	-0,001	0,004	-0,217
	$\beta_9$	0,007	0,015	0,480	0,020	0,007	3,047	-0,033	0,013	-2,472
3	$\beta_0$	-8,014	1,537	-5,216	-4,247	0,656	-6,479	-4,742	1,325	-3,578
	$\beta_1$	0,024	0,019	1,287	0,014	0,008	1,828	-0,023	0,016	-1,397
	$\beta_2$	-0,005	0,013	-0,429	-0,033	0,005	-6,077	0,006	0,013	0,505
	$\beta_4$	0,043	0,041	1,060	0,074	0,017	4,518	0,092	0,034	2,713
	$\beta_6$	-0,005	0,002	-2,478	0,002	0,001	1,744	-0,003	0,002	-1,699
	$\beta_7$	-0,002	0,002	-1,042	0,002	0,001	1,516	0,002	0,002	1,059
	$\beta_9$	-0,005	0,011	-0,482	0,016	0,005	3,291	-0,018	0,010	-1,869
4	$\beta_0$	-10,291	2,467	-4,171	-4,373	1,008	-4,340	-6,718	2,118	-3,171
	$\beta_1$	0,058	0,030	1,958	0,006	0,012	0,496	-0,003	0,026	-0,100
	$\beta_2$	-0,017	0,022	-0,792	-0,024	0,009	-2,624	0,009	0,023	0,390
	$\beta_4$	0,051	0,062	0,828	0,044	0,024	1,858	0,117	0,052	2,264
	$\beta_6$	-0,006	0,004	-1,567	0,003	0,002	1,726	-0,004	0,003	-1,197
	$\beta_7$	-0,001	0,005	-0,195	0,003	0,002	1,565	0,001	0,004	0,337
	$\beta_9$	0,002	0,020	0,103	0,024	0,008	3,136	-0,027	0,016	-1,657
5	$\beta_0$	-10,274	2,790	-3,683	-4,662	1,109	-4,205	-6,737	2,354	-2,862
	$\beta_1$	0,064	0,034	1,901	0,010	0,013	0,763	-0,001	0,029	-0,032
	$\beta_2$	-0,026	0,026	-1,024	-0,024	0,011	-2,153	0,010	0,028	0,343
	$\beta_4$	0,048	0,067	0,725	0,045	0,026	1,746	0,130	0,057	2,299
	$\beta_6$	-0,005	0,004	-1,324	0,002	0,002	1,546	-0,005	0,003	-1,817
	$\beta_7$	0,000	0,005	0,068	0,002	0,002	1,043	0,000	0,004	0,070
	$\beta_9$	0,008	0,020	0,413	0,021	0,008	2,776	-0,031	0,017	-1,871

Lokasi	Par	IBU			NEONTAL DINI			NEONATAL LANJUT		
		Est	Se	Z	Est	Se	Z	Est	Se	Z
6	$\beta_0$	-8,213	2,100	-3,912	-4,018	0,853	-4,709	-5,617	1,735	-3,237
	$\beta_1$	0,037	0,025	1,457	0,011	0,010	1,045	-0,008	0,021	-0,389
	$\beta_2$	-0,015	0,016	-0,953	-0,030	0,007	-4,512	0,001	0,016	0,064
	$\beta_4$	0,042	0,049	0,860	0,068	0,019	3,635	0,090	0,040	2,284
	$\beta_6$	-0,005	0,003	-1,878	0,001	0,001	1,036	-0,003	0,003	-1,206
	$\beta_7$	-0,003	0,003	-1,027	0,001	0,001	0,736	0,002	0,002	0,812
	$\beta_9$	-0,011	0,016	-0,688	0,015	0,006	2,361	-0,017	0,013	-1,294
7	$\beta_0$	-10,542	5,495	-1,919	-4,935	2,136	-2,310	-7,255	4,324	-1,678
	$\beta_1$	0,060	0,063	0,944	0,009	0,024	0,382	0,008	0,053	0,153
	$\beta_2$	-0,010	0,050	-0,195	-0,021	0,021	-0,974	0,001	0,052	0,028
	$\beta_4$	0,040	0,116	0,345	0,046	0,042	1,095	0,108	0,096	1,120
	$\beta_6$	-0,012	0,011	-1,043	0,001	0,004	0,217	-0,002	0,009	-0,212
	$\beta_7$	-0,004	0,014	-0,287	0,004	0,006	0,649	-0,002	0,011	-0,168
	$\beta_9$	0,002	0,046	0,036	0,028	0,016	1,741	-0,021	0,035	-0,600
8	$\beta_0$	-6,737	1,356	-4,969	-3,777	0,568	-6,646	-3,099	1,143	-2,712
	$\beta_1$	0,010	0,016	0,639	0,011	0,007	1,708	-0,038	0,014	-2,768
	$\beta_2$	-0,004	0,011	-0,404	-0,033	0,004	-7,552	0,001	0,010	0,077
	$\beta_4$	0,036	0,035	1,030	0,082	0,014	5,757	0,072	0,029	2,462
	$\beta_6$	-0,005	0,002	-2,873	0,001	0,001	0,966	-0,002	0,002	-1,138
	$\beta_7$	-0,003	0,002	-1,611	0,001	0,001	1,064	0,003	0,001	2,345
	$\beta_9$	-0,010	0,010	-0,996	0,013	0,004	2,969	-0,008	0,008	-0,943
9	$\beta_0$	-6,588	1,386	-4,755	-3,695	0,579	-6,383	-2,960	1,164	-2,543
	$\beta_1$	0,009	0,017	0,550	0,011	0,007	1,566	-0,039	0,014	-2,823
	$\beta_2$	-0,004	0,011	-0,406	-0,033	0,004	-7,465	0,000	0,010	0,023
	$\beta_4$	0,035	0,035	0,994	0,082	0,014	5,723	0,069	0,030	2,334
	$\beta_6$	-0,005	0,002	-2,842	0,001	0,001	0,800	-0,002	0,002	-1,017
	$\beta_7$	-0,003	0,002	-1,646	0,001	0,001	0,974	0,004	0,001	2,451
	$\beta_9$	-0,011	0,010	-1,057	0,012	0,004	2,805	-0,007	0,009	-0,778
10	$\beta_0$	-15,416	10,081	-1,529	-3,857	4,114	-0,937	-0,547	7,945	-0,069
	$\beta_1$	0,137	0,134	1,023	0,070	0,053	1,321	-0,033	0,107	-0,309
	$\beta_2$	-0,014	0,069	-0,202	-0,073	0,026	-2,853	-0,026	0,055	-0,473
	$\beta_4$	0,122	0,132	0,920	0,111	0,052	2,109	0,094	0,107	0,877
	$\beta_6$	-0,011	0,013	-0,892	-0,005	0,005	-1,109	-0,005	0,010	-0,479
	$\beta_7$	-0,017	0,011	-1,581	-0,008	0,004	-1,833	-0,000	0,008	-0,022
	$\beta_9$	-0,089	0,073	-1,220	-0,039	0,027	-1,457	-0,026	0,053	-0,491



Lokasi	Par	IBU			NEONTAL DINI			NEONATAL LANJUT		
		Est	Se	Z	Est	Se	Z	Est	Se	Z
11	$\beta_0$	-7,766	4,796	-1,619	-0,037	1,990	-0,019	2,185	3,791	0,576
	$\beta_1$	0,033	0,066	0,495	-0,004	0,026	-0,140	-0,076	0,053	-1,448
	$\beta_2$	-0,012	0,031	-0,390	-0,049	0,012	-4,043	-0,016	0,026	-0,629
	$\beta_4$	0,050	0,086	0,578	0,095	0,035	2,721	0,051	0,072	0,702
	$\beta_6$	-0,004	0,006	-0,796	-0,003	0,002	-1,232	-0,003	0,005	-0,628
	$\beta_7$	-0,008	0,004	-1,815	-0,003	0,002	-1,765	0,003	0,003	0,897
	$\beta_9$	-0,028	0,027	-1,025	-0,015	0,011	-1,351	-0,009	0,021	-0,419
12	$\beta_0$	-6,007	20,502	-0,293	3,114	8,627	0,361	-4,537	13,582	-0,334
	$\beta_1$	-0,106	0,380	-0,279	-0,065	0,152	-0,427	0,112	0,233	0,481
	$\beta_2$	0,116	0,277	0,418	-0,007	0,088	-0,078	-0,123	0,117	-1,045
	$\beta_4$	-0,124	0,582	-0,214	-0,059	0,216	-0,271	0,269	0,330	0,813
	$\beta_6$	-0,003	0,026	-0,118	-0,006	0,010	-0,558	-0,009	0,015	-0,595
	$\beta_7$	-0,012	0,023	-0,543	-0,008	0,009	-0,947	-0,004	0,013	-0,308
	$\beta_9$	-0,051	0,172	-0,294	-0,047	0,062	-0,753	-0,044	0,089	-0,494
13	$\beta_0$	-6,450	1,416	-4,554	-3,636	0,590	-6,160	-2,815	1,186	-2,374
	$\beta_1$	0,008	0,017	0,451	0,010	0,007	1,472	-0,041	0,014	-2,877
	$\beta_2$	-0,004	0,011	-0,386	-0,033	0,004	-7,348	-0,000	0,010	-0,014
	$\beta_4$	0,034	0,036	0,949	0,083	0,015	5,663	0,067	0,030	2,229
	$\beta_6$	-0,005	0,002	-2,789	0,001	0,001	0,663	-0,002	0,002	-0,943
	$\beta_7$	-0,003	0,002	-1,652	0,001	0,001	0,880	0,004	0,001	2,496
	$\beta_9$	-0,011	0,010	-1,077	0,012	0,004	2,656	-0,006	0,009	-0,668
14	$\beta_0$	-3,990	3,603	-1,107	-0,142	1,466	-0,097	1,739	2,684	0,648
	$\beta_1$	-0,017	0,046	-0,378	-0,014	0,018	-0,782	-0,082	0,033	-2,466
	$\beta_2$	-0,001	0,024	-0,024	-0,038	0,009	-4,145	-0,008	0,020	-0,397
	$\beta_4$	0,045	0,078	0,569	0,112	0,031	3,614	0,036	0,065	0,558
	$\beta_6$	-0,007	0,005	-1,613	-0,004	0,002	-1,985	-0,002	0,004	-0,566
	$\beta_7$	-0,005	0,003	-1,652	-0,002	0,002	-1,411	0,004	0,002	1,825
	$\beta_9$	-0,028	0,021	-1,324	-0,012	0,009	-1,289	0,000	0,017	0,011
15	$\beta_0$	0,082	3,449	0,024	0,923	2,162	0,427	0,660	4,056	0,163
	$\beta_1$	-0,082	0,040	-2,055	-0,021	0,027	-0,782	-0,115	0,051	-2,251
	$\beta_2$	0,025	0,024	1,033	-0,042	0,015	-2,925	0,025	0,030	0,822
	$\beta_4$	0,169	0,115	1,471	0,196	0,044	4,468	0,049	0,058	0,847
	$\beta_6$	-0,011	0,005	-1,925	-0,007	0,003	-2,366	0,004	0,007	0,565
	$\beta_7$	-0,009	0,004	-1,875	0,001	0,002	0,387	0,008	0,002	4,163
	$\beta_9$	-0,051	0,020	-2,584	-0,020	0,011	-1,913	0,025	0,025	1,042

Lokasi	Par	IBU			NEONTAL DINI			NEONATAL LANJUT		
		Est	Se	Z	Est	Se	Z	Est	Se	Z
16	$\beta_0$	-1,440	3,731	-0,386	-1,805	1,625	-1,111	0,094	2,940	0,032
	$\beta_1$	-0,079	0,041	-1,942	-0,001	0,016	-0,041	-0,074	0,030	-2,487
	$\beta_2$	0,035	0,037	0,933	-0,035	0,014	-2,474	-0,002	0,029	-0,056
	$\beta_4$	0,011	0,127	0,090	0,162	0,051	3,186	0,052	0,103	0,505
	$\beta_6$	-0,010	0,007	-1,520	-0,006	0,003	-1,885	-0,003	0,006	-0,503
	$\beta_7$	-0,002	0,005	-0,435	-0,001	0,003	-0,243	0,006	0,004	1,677
	$\beta_9$	-0,019	0,034	-0,565	-0,008	0,014	-0,543	0,011	0,027	0,397
17	$\beta_0$	-2,018	3,240	-0,623	-2,160	1,510	-1,431	-1,385	2,832	-0,489
	$\beta_1$	-0,064	0,035	-1,806	0,002	0,015	0,120	-0,073	0,028	-2,629
	$\beta_2$	0,023	0,029	0,778	-0,036	0,012	-2,892	0,009	0,028	0,319
	$\beta_4$	-0,053	0,121	-0,440	0,156	0,047	3,326	-0,008	0,095	-0,088
	$\beta_6$	-0,004	0,006	-0,761	-0,005	0,003	-1,578	0,002	0,005	0,442
	$\beta_7$	-0,003	0,004	-0,900	0,001	0,002	0,342	0,007	0,004	1,784
	$\beta_9$	-0,012	0,028	-0,444	-0,004	0,013	-0,295	0,026	0,025	1,037
18	$\beta_0$	-2,855	3,450	-0,828	-1,959	1,538	-1,274	-2,246	2,918	-0,770
	$\beta_1$	-0,061	0,035	-1,723	-0,004	0,015	-0,297	-0,079	0,028	-2,793
	$\beta_2$	0,027	0,029	0,942	-0,033	0,011	-2,936	0,019	0,026	0,738
	$\beta_4$	-0,024	0,132	-0,182	0,139	0,048	2,916	-0,036	0,111	-0,322
	$\beta_6$	-0,005	0,006	-0,761	-0,004	0,003	-1,488	0,003	0,006	0,596
	$\beta_7$	-0,003	0,004	-0,594	0,002	0,002	0,851	0,009	0,003	2,794
	$\beta_9$	-0,009	0,031	-0,290	0,001	0,012	0,072	0,042	0,026	1,590
19	$\beta_0$	-6,042	1,822	-3,316	-2,196	1,401	-1,568	-3,883	1,999	-1,943
	$\beta_1$	-0,072	0,021	-3,364	0,000	0,016	0,004	-0,085	0,029	-2,885
	$\beta_2$	0,065	0,018	3,683	-0,036	0,009	-4,287	0,039	0,017	2,257
	$\beta_4$	-0,268	0,094	-2,849	0,166	0,035	4,775	-0,077	0,067	-1,145
	$\beta_6$	0,002	0,005	0,456	-0,003	0,002	-1,463	0,007	0,004	1,686
	$\beta_7$	-0,004	0,004	-0,990	0,003	0,001	2,080	0,009	0,003	3,672
	$\beta_9$	0,037	0,024	1,540	-0,002	0,009	-0,206	0,055	0,015	3,624
20	$\beta_0$	-2,794	5,107	-0,547	-0,695	2,428	-0,286	-2,894	4,771	-0,607
	$\beta_1$	-0,049	0,057	-0,858	-0,016	0,026	-0,609	-0,084	0,050	-1,686
	$\beta_2$	0,014	0,029	0,459	-0,035	0,013	-2,726	0,024	0,029	0,825
	$\beta_4$	-0,051	0,155	-0,330	0,125	0,065	1,908	-0,144	0,148	-0,972
	$\beta_6$	-0,002	0,009	-0,198	-0,005	0,004	-1,060	0,011	0,009	1,263
	$\beta_7$	-0,003	0,005	-0,626	0,003	0,002	1,221	0,011	0,004	2,440
	$\beta_9$	-0,009	0,038	-0,226	0,002	0,017	0,100	0,061	0,036	1,688

Lokasi	Par	IBU			NEONTAL DINI			NEONATAL LANJUT		
		Est	Se	Z	Est	Se	Z	Est	Se	Z
21	$\beta_0$	-4,097	7,588	-0,540	0,874	3,662	0,239	-2,439	7,935	-0,307
	$\beta_1$	-0,029	0,105	-0,274	-0,033	0,050	-0,663	-0,093	0,105	-0,883
	$\beta_2$	0,006	0,044	0,132	-0,034	0,020	-1,662	0,027	0,045	0,610
	$\beta_4$	-0,037	0,204	-0,182	0,108	0,092	1,173	-0,181	0,200	-0,905
	$\beta_6$	-0,002	0,012	-0,156	-0,004	0,006	-0,777	0,012	0,012	1,018
	$\beta_7$	-0,002	0,006	-0,404	0,003	0,003	0,978	0,011	0,005	2,047
	$\beta_9$	-0,008	0,039	-0,211	-0,002	0,017	-0,100	0,066	0,039	1,679
22	$\beta_0$	-4,559	4,799	-0,950	-1,324	1,850	-0,716	-6,456	4,031	-1,602
	$\beta_1$	0,004	0,055	0,073	-0,013	0,021	-0,626	-0,015	0,044	-0,333
	$\beta_2$	-0,013	0,019	-0,716	-0,034	0,008	-4,340	-0,002	0,018	-0,114
	$\beta_4$	0,071	0,073	0,971	0,102	0,030	3,398	0,010	0,071	0,137
	$\beta_6$	-0,011	0,006	-1,671	-0,001	0,003	-0,452	0,004	0,006	0,734
	$\beta_7$	-0,003	0,004	-0,836	0,003	0,002	1,750	0,010	0,003	3,256
	$\beta_9$	-0,037	0,028	-1,303	0,006	0,011	0,593	0,035	0,024	1,498
23	$\beta_0$	-6,869	5,715	-1,202	-3,416	2,221	-1,538	-9,364	4,155	-2,254
	$\beta_1$	0,030	0,059	0,506	0,007	0,021	0,306	0,016	0,044	0,364
	$\beta_2$	-0,018	0,030	-0,611	-0,037	0,013	-2,847	0,011	0,028	0,386
	$\beta_4$	0,076	0,107	0,714	0,084	0,039	2,156	0,064	0,079	0,807
	$\beta_6$	-0,012	0,011	-1,063	0,000	0,004	0,037	0,000	0,008	-0,003
	$\beta_7$	-0,001	0,007	-0,198	0,005	0,003	1,513	0,003	0,005	0,644
	$\beta_9$	-0,018	0,040	-0,461	0,026	0,014	1,896	-0,000	0,030	-0,003
24	$\beta_0$	-7,750	3,406	-2,275	-2,546	1,373	-1,854	-7,638	2,951	-2,588
	$\beta_1$	0,032	0,039	0,833	-0,004	0,015	-0,277	0,004	0,033	0,139
	$\beta_2$	-0,014	0,017	-0,821	-0,032	0,007	-4,562	-0,006	0,016	-0,401
	$\beta_4$	0,058	0,070	0,818	0,095	0,028	3,350	0,027	0,062	0,428
	$\beta_6$	-0,007	0,005	-1,450	-0,001	0,002	-0,267	0,004	0,005	0,919
	$\beta_7$	-0,002	0,004	-0,589	0,003	0,002	2,050	0,009	0,003	3,017
	$\beta_9$	-0,018	0,024	-0,741	0,014	0,009	1,506	0,024	0,021	1,155
25	$\beta_0$	-6,849	1,348	-5,082	-3,868	0,568	-6,809	-3,246	1,143	-2,840
	$\beta_1$	0,011	0,016	0,687	0,012	0,007	1,800	-0,037	0,014	-2,724
	$\beta_2$	-0,004	0,011	-0,367	-0,033	0,004	-7,502	0,002	0,010	0,173
	$\beta_4$	0,037	0,035	1,065	0,081	0,014	5,658	0,073	0,029	2,489
	$\beta_6$	-0,005	0,002	-2,868	0,001	0,001	1,132	-0,002	0,002	-1,119
	$\beta_7$	-0,003	0,002	-1,531	0,001	0,001	1,284	0,003	0,001	2,312
	$\beta_9$	-0,009	0,010	-0,943	0,013	0,004	3,139	-0,008	0,008	-0,988

Lokasi	Par	IBU			NEONTAL DINI			NEONATAL LANJUT		
		Est	Se	Z	Est	Se	Z	Est	Se	Z
26	$\beta_0$	-8,607	2,340	-3,678	-4,349	1,079	-4,033	-6,260	2,241	-2,794
	$\beta_1$	0,027	0,031	0,881	0,009	0,013	0,657	-0,028	0,029	-0,962
	$\beta_2$	0,005	0,027	0,179	-0,032	0,011	-2,861	0,029	0,030	0,966
	$\beta_4$	0,046	0,090	0,508	0,062	0,036	1,719	0,099	0,078	1,274
	$\beta_6$	-0,007	0,005	-1,408	0,003	0,002	1,413	-0,003	0,004	-0,562
	$\beta_7$	-0,009	0,007	-1,172	0,006	0,003	1,853	-0,001	0,006	-0,135
	$\beta_9$	-0,021	0,024	-0,886	0,033	0,010	3,277	-0,026	0,021	-1,247
27	$\beta_0$	-8,986	2,015	-4,458	-4,591	0,941	-4,882	-7,034	1,998	-3,521
	$\beta_1$	0,011	0,027	0,411	0,016	0,012	1,337	-0,041	0,026	-1,557
	$\beta_2$	0,021	0,025	0,830	-0,037	0,010	-3,562	0,051	0,028	1,797
	$\beta_4$	0,018	0,081	0,224	0,064	0,035	1,853	0,099	0,072	1,373
	$\beta_6$	-0,004	0,004	-0,948	0,004	0,002	1,922	-0,003	0,004	-0,643
	$\beta_7$	-0,007	0,006	-1,070	0,006	0,003	2,246	-0,001	0,005	-0,270
	$\beta_9$	-0,007	0,020	-0,367	0,031	0,009	3,454	-0,024	0,018	-1,335
28	$\beta_0$	-8,997	1,978	-4,548	-4,668	0,907	-5,144	-7,036	1,923	-3,659
	$\beta_1$	0,008	0,026	0,299	0,020	0,012	1,682	-0,037	0,025	-1,485
	$\beta_2$	0,020	0,024	0,831	-0,037	0,010	-3,676	0,049	0,027	1,807
	$\beta_4$	0,022	0,073	0,301	0,066	0,032	2,092	0,121	0,066	1,834
	$\beta_6$	-0,003	0,003	-0,829	0,003	0,002	1,853	-0,004	0,003	-1,274
	$\beta_7$	-0,004	0,006	-0,745	0,005	0,003	1,843	-0,002	0,005	-0,456
	$\beta_9$	0,002	0,016	0,146	0,024	0,008	3,072	-0,030	0,015	-1,950
29	$\beta_0$	-8,597	2,098	-4,097	-4,615	0,971	-4,753	-6,748	2,053	-3,287
	$\beta_1$	0,009	0,028	0,335	0,022	0,013	1,772	-0,034	0,027	-1,256
	$\beta_2$	0,014	0,026	0,548	-0,041	0,011	-3,684	0,043	0,030	1,450
	$\beta_4$	0,021	0,083	0,248	0,070	0,036	1,954	0,119	0,075	1,593
	$\beta_6$	-0,003	0,004	-0,659	0,003	0,002	1,619	-0,004	0,004	-1,065
	$\beta_7$	-0,006	0,006	-0,965	0,005	0,003	1,691	-0,004	0,005	-0,641
	$\beta_9$	0,002	0,019	0,107	0,025	0,009	2,765	-0,030	0,017	-1,704
30	$\beta_0$	-6,766	1,373	-4,928	-3,762	0,575	-6,541	-3,156	1,158	-2,725
	$\beta_1$	0,011	0,016	0,675	0,011	0,007	1,648	-0,037	0,014	-2,688
	$\beta_2$	-0,005	0,011	-0,429	-0,033	0,004	-7,479	0,001	0,010	0,068
	$\beta_4$	0,036	0,035	1,034	0,081	0,014	5,700	0,071	0,029	2,429
	$\beta_6$	-0,005	0,002	-2,863	0,001	0,001	0,953	-0,002	0,002	-1,101
	$\beta_7$	-0,003	0,002	-1,614	0,001	0,001	1,067	0,003	0,001	2,342
	$\beta_9$	-0,010	0,010	-1,016	0,013	0,004	2,935	-0,008	0,008	-0,912

Lokasi	Par	IBU			NEONTAL DINI			NEONATAL LANJUT		
		Est	Se	Z	Est	Se	Z	Est	Se	Z
31	$\beta_0$	-11,963	10,537	-1,135	0,050	4,411	0,011	2,245	8,248	0,272
	$\beta_1$	0,092	0,178	0,516	0,020	0,076	0,258	-0,037	0,145	-0,255
	$\beta_2$	-0,031	0,080	-0,392	-0,066	0,034	-1,956	-0,050	0,066	-0,769
	$\beta_4$	0,165	0,196	0,844	0,080	0,082	0,968	0,099	0,164	0,601
	$\beta_6$	-0,003	0,011	-0,240	-0,005	0,004	-1,096	-0,006	0,009	-0,636
	$\beta_7$	-0,011	0,009	-1,202	-0,007	0,004	-1,987	-0,000	0,007	-0,018
	$\beta_9$	-0,027	0,058	-0,471	-0,031	0,023	-1,346	-0,027	0,044	-0,613
32	$\beta_0$	-4,775	5,445	-0,877	-1,772	2,131	-0,832	-3,377	4,402	-0,767
	$\beta_1$	0,012	0,064	0,188	-0,004	0,025	-0,144	-0,052	0,053	-0,979
	$\beta_2$	-0,017	0,025	-0,679	-0,037	0,011	-3,440	0,010	0,025	0,415
	$\beta_4$	0,061	0,070	0,874	0,096	0,028	3,380	0,039	0,062	0,632
	$\beta_6$	-0,009	0,006	-1,497	-0,001	0,003	-0,436	0,000	0,005	0,063
	$\beta_7$	-0,005	0,004	-1,130	0,001	0,002	0,520	0,007	0,003	1,975
	$\beta_9$	-0,047	0,031	-1,528	0,000	0,012	0,036	0,017	0,024	0,730
33	$\beta_0$	-4,103	6,363	-0,645	-0,630	2,631	-0,239	-8,062	5,603	-1,439
	$\beta_1$	-0,009	0,076	-0,114	-0,020	0,032	-0,606	-0,002	0,067	-0,028
	$\beta_2$	-0,007	0,025	-0,298	-0,035	0,011	-3,065	-0,006	0,024	-0,250
	$\beta_4$	0,046	0,110	0,419	0,111	0,050	2,244	-0,012	0,096	-0,130
	$\beta_6$	-0,010	0,009	-1,161	-0,002	0,004	-0,628	0,006	0,008	0,837
	$\beta_7$	-0,002	0,005	-0,479	0,003	0,002	1,589	0,014	0,004	3,299
	$\beta_9$	-0,026	0,037	-0,711	0,006	0,014	0,464	0,061	0,030	1,998
34	$\beta_0$	-6,916	1,360	-5,086	-3,890	0,574	-6,778	-3,336	1,156	-2,887
	$\beta_1$	0,012	0,016	0,729	0,012	0,007	1,793	-0,036	0,014	-2,638
	$\beta_2$	-0,004	0,011	-0,371	-0,033	0,004	-7,415	0,002	0,010	0,195
	$\beta_4$	0,038	0,035	1,073	0,081	0,015	5,573	0,074	0,030	2,482
	$\beta_6$	-0,005	0,002	-2,848	0,001	0,001	1,177	-0,002	0,002	-1,111
	$\beta_7$	-0,003	0,002	-1,502	0,001	0,001	1,335	0,003	0,002	2,266
	$\beta_9$	-0,009	0,010	-0,928	0,014	0,004	3,159	-0,009	0,009	-1,006
35	$\beta_0$	-8,018	1,600	-5,012	-4,377	0,695	-6,295	-4,804	1,403	-3,424
	$\beta_1$	0,021	0,020	1,088	0,015	0,008	1,857	-0,025	0,017	-1,490
	$\beta_2$	-0,003	0,014	-0,178	-0,033	0,006	-5,711	0,010	0,014	0,700
	$\beta_4$	0,045	0,045	1,006	0,075	0,018	4,089	0,092	0,038	2,433
	$\beta_6$	-0,005	0,002	-2,276	0,002	0,001	1,765	-0,003	0,002	-1,398
	$\beta_7$	-0,002	0,003	-0,914	0,002	0,001	1,871	0,002	0,002	1,029
	$\beta_9$	-0,005	0,012	-0,442	0,018	0,005	3,318	-0,018	0,011	-1,707



**LAMPIRAN 14 : Hasil Estimasi Parameter Kovariansi dan Nilai Statistik Uji  
Model GWMPR dengan Kovariansi Merupakan Konstanta**

Lokasi	Est	Se	Z
1	-3,458	3,140	-1,101
2	-3,855	4,465	-0,864
3	1,954	1,065	1,834
4	-2,692	4,611	-0,584
5	-2,765	3,309	-0,836
6	1,788	1,066	1,678
7	-4,315	3,915	-1,102
8	2,139	0,711	3,007
9	2,140	0,706	3,033
10	1,212	1,804	0,672
11	1,411	1,060	1,331
12	0,100	2,280	0,044
13	2,138	0,707	3,025
14	1,718	1,000	1,718
15	18,377	2,779	6,612
16	-6,479	2,443	-2,652
17	7,185	2,099	3,422
18	-6,673	2,324	-2,871

Lokasi	Est	Se	Z
19	12,191	1,627	7,494
20	-4,083	3,204	-1,275
21	-11,899	3,208	-3,709
22	2,649	1,487	1,781
23	-7,408	2,403	-3,083
24	2,443	1,632	1,497
25	2,168	0,739	2,935
26	-9,098	2,299	-3,958
27	-6,749	2,320	-2,909
28	-6,599	1,917	-3,443
29	-6,857	2,396	-2,862
30	2,136	0,716	2,983
31	1,664	4,410	0,377
32	2,294	1,063	2,159
33	-8,080	2,239	-3,609
34	2,171	0,754	2,878
35	1,998	1,297	1,541





## LAMPIRAN 15 : Uji Kesamaan Model 1 dan Model 3

Uji kesamaan model 1 dan model 3 digunakan untuk mengetahui apakah ada perbedaan model GWMPR dengan kovariansi merupakan konstanta (model 3) dengan model MPR dengan kovariansi merupakan konstanta (model 1). Mempertimbangkan pengujian ini termasuk uji non nested, maka dalam penelitian ini digunakan *Young's Test*, dengan tahapan uji sebagai berikut :

- Formulasi hipotesis

$$H_0 : \beta_{hl}(\mathbf{u}_i) = \beta_{hl}$$

$$H_1 : \text{paling sedikit ada satu } \beta_{hl}(\mathbf{u}_i) \neq \beta_{hl} ; h=1,2,3 ; l=0,1,2,4,6,7,9 ; i=1,2,...,35$$

- Tingkat signifikan ( $\alpha$ ) = 0,05

- Statistik uji

$$V = \frac{\sqrt{n} \left( \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n m_i \right)}{\sqrt{\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n (m_i - \bar{m})^2}} \sim N(0,1)$$

dimana

$$\begin{aligned} m_i &= \ln \left( \frac{f_1(\mathbf{y}_i | \mathbf{x}_i, \hat{\boldsymbol{\beta}})}{f_3(\mathbf{y}_i | \mathbf{x}_i, \hat{\boldsymbol{\beta}}(\mathbf{u}_i))} \right) \\ &= (p-1)(\hat{\lambda}_0 - \hat{\lambda}_0(\mathbf{u}_i)) - \sum_{h=1}^p s_i (e^{\mathbf{x}_i^T \hat{\boldsymbol{\beta}}_h} - e^{\mathbf{x}_i^T \hat{\boldsymbol{\beta}}_h(\mathbf{u}_i)}) + (\ln \hat{A}_i - \ln \hat{C}_i). \end{aligned}$$

dengan,

$$\begin{aligned} \hat{A}_i &= \sum_{v=0}^q \left( \frac{\hat{\lambda}_0^v}{v!} \prod_{h=1}^p \frac{(s_i e^{\mathbf{x}_i^T \hat{\boldsymbol{\beta}}_h} - \hat{\lambda}_0)^{y_{hi}-v}}{(y_{hi}-v)!} \right) \text{ dan} \\ \hat{C}_i &= \sum_{v=0}^q \left( \frac{\hat{\lambda}_0^v(\mathbf{u}_i)}{v!} \prod_{h=1}^p \frac{(s_i e^{\mathbf{x}_i^T \hat{\boldsymbol{\beta}}_h(\mathbf{u}_i)} - \hat{\lambda}_0(\mathbf{u}_i))^{y_{hi}-v}}{(y_{hi}-v)!} \right) \end{aligned}$$

- Komputasi

Memperhatikan hasil estimasi Parameter model 1 dan model 3, maka diperoleh nilai  $m_i$  sebagai berikut :

$i$	$m_i$	$i$	$m_i$	$i$	$m_i$	$i$	$m_i$	$i$	$m_i$
1	-3.040	8	-0.025	15	-4.665	22	-2.187	29	-2.568
2	-0.281	9	0.003	16	-3.175	23	-2.105	30	0.005
3	-0.673	10	-2.257	17	-4.226	24	-0.667	31	-12.65
4	-2.303	11	-0.574	18	-0.034	25	0.051	32	-1.688
5	-4.749	12	-5.437	19	-1.779	26	-3.780	33	-2.570
6	-0.483	13	0.067	20	-1.131	27	-5.006	34	0.031
7	-4.135	14	-0.237	21	-4.306	28	-2.976	35	0.081

$$V = \frac{\sqrt{35}(-2.271)}{\sqrt{\frac{1}{35}(216.363)}} = -5.403$$

- Daerah Kritis

$H_0$  ditolak jika  $|V| > Z_{0,025} = 1,96$

- Kesimpulan

Hasil komputasi  $V = -5,403$ , sehingga  $H_0$  ditolak. Hal itu berarti terdapat perbedaan antara model GWMPR dengan MPR untuk kovariansi merupakan konstanta.

**LAMPIRAN 16 : Hasil Estimasi Parameter dan Nilai Statistik Uji Model  
GWMPR dengan Kovariansi Fungsi dari Variabel Bebas**

Lokasi	Par	IBU			NEONTAL DINI			NEONATAL LANJUT		
		Est	Se	Z	Est	Se	Z	Est	Se	Z
1	$\beta_0$	-40,79	17,45	-2,338	-6,462	1,603	-4,032	-19,82	5,537	-3,578
	$\beta_1$	0,221	0,111	1,996	0,027	0,020	1,379	0,009	0,059	0,147
	$\beta_2$	0,086	0,109	0,794	-0,027	0,019	-1,391	0,124	0,081	1,542
	$\beta_4$	-0,344	0,449	-0,766	0,027	0,047	0,581	0,105	0,154	0,683
	$\beta_6$	0,010	0,011	0,874	0,004	0,002	2,298	-0,002	0,005	-0,523
	$\beta_7$	0,018	0,020	0,893	0,005	0,005	1,123	-0,001	0,014	-0,055
	$\beta_9$	0,228	0,131	1,735	0,033	0,010	3,186	0,022	0,031	0,693
2	$\beta_0$	-27,48	10,14	-2,712	-6,237	0,922	-6,765	-15,92	4,044	-3,936
	$\beta_1$	0,148	0,076	1,939	0,026	0,011	2,408	-0,001	0,036	-0,039
	$\beta_2$	0,044	0,048	0,904	-0,029	0,009	-3,352	0,093	0,053	1,772
	$\beta_4$	-0,091	0,162	-0,559	0,053	0,025	2,125	0,103	0,073	1,400
	$\beta_6$	0,002	0,006	0,300	0,004	0,001	2,741	-0,002	0,004	-0,549
	$\beta_7$	0,004	0,011	0,341	0,003	0,002	1,711	0,002	0,005	0,460
	$\beta_9$	0,120	0,074	1,626	0,032	0,007	4,413	0,015	0,023	0,650
3	$\beta_0$	-5,750	2,148	-2,677	-3,914	0,623	-6,284	-2,472	1,574	-1,570
	$\beta_1$	-0,086	0,028	-3,067	-0,004	0,007	-0,490	-0,121	0,021	-5,720
	$\beta_2$	0,082	0,022	3,715	-0,016	0,005	-3,311	0,079	0,018	4,379
	$\beta_4$	0,074	0,074	1,006	0,088	0,017	5,335	0,152	0,049	3,118
	$\beta_6$	-0,018	0,003	-5,696	-0,002	0,001	-2,508	-0,012	0,002	-5,163
	$\beta_7$	0,002	0,004	0,480	0,002	0,001	1,625	0,007	0,002	3,550
	$\beta_9$	0,013	0,014	0,912	0,020	0,005	4,457	-0,003	0,011	-0,292
4	$\beta_0$	-31,80	21,51	-1,479	-4,030	2,144	-1,880	-18,21	10,49	-1,736
	$\beta_1$	0,225	0,145	1,556	-0,008	0,025	-0,311	0,016	0,088	0,180
	$\beta_2$	-0,008	0,125	-0,065	-0,015	0,027	-0,565	0,093	0,162	0,573
	$\beta_4$	-0,220	0,401	-0,549	0,011	0,049	0,222	0,091	0,158	0,577
	$\beta_6$	0,014	0,020	0,692	0,004	0,004	1,071	0,003	0,013	0,245
	$\beta_7$	0,003	0,112	0,030	0,003	0,008	0,349	0,002	0,026	0,077
	$\beta_9$	0,169	0,160	1,057	0,027	0,016	1,656	0,023	0,052	0,451
5	$\beta_0$	-253,1	642,7	-0,394	-3,206	4,303	-0,745	-12,12	12,46	-0,972
	$\beta_1$	1,812	3,864	0,469	-0,006	0,038	-0,151	-0,136	0,179	-0,759
	$\beta_2$	0,325	2,367	0,137	-0,024	0,059	-0,412	0,202	0,239	0,846
	$\beta_4$	-5,661	19,12	-0,296	-0,012	0,121	-0,095	0,400	0,292	1,368
	$\beta_6$	0,150	0,409	0,367	0,004	0,007	0,568	-0,013	0,018	-0,717
	$\beta_7$	0,127	0,518	0,245	0,003	0,014	0,255	-0,003	0,033	-0,086
	$\beta_9$	2,108	5,911	0,357	0,023	0,021	1,092	-0,099	0,076	-1,303

Lokasi	Par	IBU			NEONTAL DINI			NEONATAL LANJUT		
		Est	Se	Z	Est	Se	Z	Est	Se	Z
6	$\beta_0$	-8,578	1,869	-4,589	-3,952	0,732	-5,398	-5,208	1,527	-3,412
	$\beta_1$	0,038	0,022	1,689	0,012	0,009	1,378	-0,012	0,019	-0,656
	$\beta_2$	-0,012	0,014	-0,845	-0,032	0,006	-5,764	-0,001	0,013	-0,056
	$\beta_4$	0,053	0,045	1,168	0,075	0,017	4,476	0,092	0,036	2,561
	$\beta_6$	-0,006	0,003	-2,337	0,001	0,001	1,022	-0,003	0,002	-1,452
	$\beta_7$	-0,009	0,004	-2,298	0,000	0,001	-0,140	0,000	0,002	-0,002
	$\beta_9$	-0,007	0,014	-0,516	0,014	0,005	2,627	-0,011	0,011	-1,011
7	$\beta_0$	-27,63	27,86	-0,992	-5,760	1,699	-3,391	-16,47	9,642	-1,708
	$\beta_1$	0,154	0,231	0,666	0,011	0,019	0,558	-0,034	0,113	-0,299
	$\beta_2$	0,045	0,082	0,544	-0,016	0,015	-1,068	0,137	0,197	0,694
	$\beta_4$	-0,084	0,317	-0,266	0,040	0,035	1,151	0,143	0,178	0,808
	$\beta_6$	0,001	0,024	0,051	0,003	0,004	0,708	-0,003	0,015	-0,222
	$\beta_7$	-0,003	0,037	-0,074	0,004	0,004	0,980	0,000	0,012	-0,022
	$\beta_9$	0,095	0,179	0,532	0,032	0,014	2,407	-0,009	0,056	-0,162
8	$\beta_0$	64,92	219,6	0,296	-1,357	5,148	-0,264	-14,07	17,15	-0,821
	$\beta_1$	-0,541	1,593	-0,339	0,006	0,049	0,127	-0,228	0,268	-0,850
	$\beta_2$	-0,462	1,437	-0,321	-0,078	0,041	-1,882	0,308	0,303	1,017
	$\beta_4$	-0,386	1,264	-0,305	0,030	0,059	0,507	0,205	0,263	0,781
	$\beta_6$	0,107	0,217	0,490	0,010	0,007	1,456	-0,002	0,024	-0,096
	$\beta_7$	0,053	0,345	0,152	0,014	0,006	2,284	-0,008	0,026	-0,294
	$\beta_9$	0,190	0,613	0,310	0,048	0,024	1,980	-0,057	0,142	-0,399
9	$\beta_0$	-8,216	1,646	-4,990	-3,957	0,597	-6,626	-4,032	1,282	-3,146
	$\beta_1$	0,030	0,019	1,554	0,014	0,007	2,037	-0,024	0,015	-1,542
	$\beta_2$	-0,009	0,011	-0,765	-0,034	0,005	-7,615	-0,005	0,010	-0,481
	$\beta_4$	0,027	0,039	0,697	0,080	0,015	5,470	0,065	0,031	2,081
	$\beta_6$	-0,004	0,002	-1,511	0,001	0,001	1,230	0,000	0,002	-0,168
	$\beta_7$	-0,009	0,003	-2,952	0,000	0,001	-0,192	0,001	0,002	0,549
	$\beta_9$	-0,009	0,013	-0,733	0,013	0,005	2,829	-0,005	0,010	-0,503
10	$\beta_0$	-22,13	23,95	-0,924	-5,584	6,487	-0,861	-0,147	12,84	-0,011
	$\beta_1$	0,180	0,333	0,541	0,100	0,082	1,213	-0,056	0,188	-0,300
	$\beta_2$	0,002	0,143	0,017	-0,076	0,042	-1,814	-0,012	0,092	-0,133
	$\beta_4$	0,093	0,372	0,250	0,121	0,080	1,514	0,058	0,204	0,284
	$\beta_6$	-0,016	0,041	-0,395	-0,010	0,008	-1,194	-0,010	0,019	-0,532
	$\beta_7$	-0,026	0,084	-0,313	-0,012	0,007	-1,620	0,003	0,012	0,224
	$\beta_9$	0,011	0,192	0,057	-0,053	0,047	-1,120	0,032	0,094	0,336

Lokasi	Par	IBU			NEONTAL DINI			NEONATAL LANJUT		
		Est	Se	Z	Est	Se	Z	Est	Se	Z
11	$\beta_0$	-5,211	2,996	-1,740	-2,916	0,779	-3,741	-1,373	2,126	-0,646
	$\beta_1$	-0,038	0,037	-1,010	0,001	0,009	0,054	-0,081	0,026	-3,151
	$\beta_2$	0,025	0,023	1,090	-0,031	0,006	-5,629	0,018	0,017	1,042
	$\beta_4$	0,020	0,086	0,233	0,089	0,018	4,832	0,075	0,053	1,420
	$\beta_6$	-0,009	0,004	-2,165	0,000	0,001	-0,308	-0,003	0,003	-0,943
	$\beta_7$	-0,009	0,009	-0,961	0,000	0,001	-0,122	0,005	0,003	1,999
	$\beta_9$	0,005	0,020	0,264	0,012	0,006	2,026	0,011	0,015	0,786
12	$\beta_0$	9,326	89,39	0,104	-0,967	5,575	-0,173	13,14	24,19	0,543
	$\beta_1$	0,026	0,989	0,026	0,087	0,064	1,355	-0,009	0,266	-0,034
	$\beta_2$	-0,258	0,117	-2,215	-0,125	0,016	-7,627	-0,216	0,063	-3,446
	$\beta_4$	-0,518	0,921	-0,563	0,051	0,086	0,597	-0,178	0,279	-0,637
	$\beta_6$	0,040	0,040	1,005	-0,003	0,005	-0,562	0,009	0,012	0,732
	$\beta_7$	-0,003	0,052	-0,061	-0,008	0,004	-2,084	0,006	0,012	0,488
	$\beta_9$	0,074	0,194	0,380	-0,034	0,025	-1,352	-0,013	0,064	-0,198
13	$\beta_0$	-8,123	1,681	-4,833	-3,906	0,609	-6,418	-3,909	1,304	-2,997
	$\beta_1$	0,029	0,020	1,466	0,014	0,007	1,946	-0,025	0,016	-1,604
	$\beta_2$	-0,008	0,012	-0,717	-0,034	0,005	-7,488	-0,005	0,011	-0,488
	$\beta_4$	0,026	0,040	0,663	0,081	0,015	5,420	0,063	0,032	1,983
	$\beta_6$	-0,004	0,002	-1,516	0,001	0,001	1,075	0,000	0,002	-0,138
	$\beta_7$	-0,010	0,003	-2,971	0,000	0,001	-0,280	0,001	0,002	0,585
	$\beta_9$	-0,010	0,013	-0,776	0,012	0,005	2,677	-0,004	0,010	-0,417
14	$\beta_0$	-6,454	3,544	-1,821	-1,629	1,113	-1,463	-1,400	2,303	-0,608
	$\beta_1$	0,010	0,042	0,235	-0,004	0,013	-0,335	-0,055	0,027	-2,006
	$\beta_2$	-0,001	0,019	-0,028	-0,035	0,007	-5,052	-0,006	0,016	-0,348
	$\beta_4$	0,004	0,071	0,053	0,102	0,024	4,232	0,016	0,054	0,291
	$\beta_6$	-0,004	0,005	-0,833	-0,002	0,002	-1,288	0,001	0,004	0,368
	$\beta_7$	-0,013	0,005	-2,514	-0,002	0,001	-1,589	0,002	0,003	0,877
	$\beta_9$	-0,032	0,027	-1,192	-0,004	0,008	-0,510	0,006	0,017	0,368
15	$\beta_0$	-0,149	5,652	-0,026	-0,682	1,422	-0,480	-0,869	3,028	-0,287
	$\beta_1$	-0,064	0,053	-1,210	-0,016	0,016	-1,019	-0,083	0,034	-2,443
	$\beta_2$	0,017	0,041	0,418	-0,032	0,009	-3,467	0,013	0,032	0,416
	$\beta_4$	0,030	0,102	0,295	0,117	0,032	3,631	-0,008	0,076	-0,109
	$\beta_6$	-0,012	0,007	-1,695	-0,004	0,002	-1,841	0,001	0,004	0,180
	$\beta_7$	-0,025	0,022	-1,138	-0,002	0,002	-1,145	0,004	0,004	0,963
	$\beta_9$	-0,043	0,045	-0,953	-0,005	0,009	-0,536	0,029	0,024	1,203

Lokasi	Par	IBU			NEONTAL DINI			NEONATAL LANJUT		
		Est	Se	Z	Est	Se	Z	Est	Se	Z
16	$\beta_0$	-107,6	179,5	-0,599	-2,487	2,876	-0,865	3,448	9,145	0,377
	$\beta_1$	3,092	5,384	0,574	0,028	0,026	1,055	0,003	0,062	0,052
	$\beta_2$	-1,390	2,359	-0,589	-0,058	0,030	-1,935	-0,139	0,071	-1,943
	$\beta_4$	7,183	12,677	0,567	0,238	0,091	2,621	0,374	0,239	1,566
	$\beta_6$	-0,532	0,949	-0,560	-0,007	0,006	-1,210	-0,002	0,021	-0,105
	$\beta_7$	-0,360	0,671	-0,536	-0,001	0,006	-0,214	0,015	0,011	1,368
	$\beta_9$	-2,300	4,066	-0,566	-0,015	0,028	-0,558	-0,013	0,076	-0,173
17	$\beta_0$	-7,863	1,819	-4,323	-3,809	0,651	-5,849	-3,704	1,397	-2,652
	$\beta_1$	0,026	0,021	1,214	0,012	0,008	1,663	-0,029	0,017	-1,760
	$\beta_2$	-0,007	0,012	-0,560	-0,034	0,005	-7,040	-0,005	0,011	-0,420
	$\beta_4$	0,025	0,043	0,579	0,083	0,016	5,157	0,055	0,034	1,603
	$\beta_6$	-0,004	0,003	-1,551	0,001	0,001	0,720	0,000	0,002	0,140
	$\beta_7$	-0,010	0,004	-2,922	0,000	0,001	-0,250	0,002	0,002	0,834
	$\beta_9$	-0,012	0,014	-0,894	0,012	0,005	2,387	0,000	0,011	-0,001
18	$\beta_0$	-51,50	47,20	-1,091	-1,802	1,848	-0,975	3,934	5,491	0,716
	$\beta_1$	1,424	1,408	1,011	0,014	0,018	0,789	-0,033	0,044	-0,745
	$\beta_2$	-0,667	0,623	-1,071	-0,054	0,013	-4,033	-0,114	0,041	-2,763
	$\beta_4$	3,315	3,342	0,992	0,199	0,056	3,544	0,252	0,172	1,460
	$\beta_6$	-0,243	0,251	-0,969	-0,007	0,004	-1,817	-0,003	0,014	-0,183
	$\beta_7$	-0,156	0,179	-0,871	0,002	0,003	0,691	0,023	0,007	3,297
	$\beta_9$	-1,059	1,070	-0,990	-0,008	0,014	-0,541	0,018	0,042	0,428
19	$\beta_0$	-7,618	1,925	-3,959	-3,605	0,689	-5,232	-3,723	1,477	-2,521
	$\beta_1$	0,024	0,022	1,070	0,010	0,008	1,248	-0,031	0,017	-1,785
	$\beta_2$	-0,006	0,012	-0,523	-0,033	0,005	-6,789	-0,004	0,011	-0,380
	$\beta_4$	0,024	0,045	0,541	0,085	0,017	5,022	0,045	0,036	1,259
	$\beta_6$	-0,004	0,003	-1,593	0,000	0,001	0,419	0,001	0,002	0,447
	$\beta_7$	-0,011	0,004	-2,942	0,000	0,001	-0,228	0,002	0,002	1,112
	$\beta_9$	-0,015	0,014	-1,028	0,011	0,005	2,131	0,005	0,011	0,415
20	$\beta_0$	-25,26	26,90	-0,939	-0,697	2,414	-0,289	2,622	8,038	0,326
	$\beta_1$	0,631	0,734	0,860	0,003	0,026	0,100	-0,033	0,078	-0,424
	$\beta_2$	-0,321	0,324	-0,989	-0,055	0,013	-4,293	-0,115	0,055	-2,078
	$\beta_4$	1,446	1,713	0,844	0,188	0,063	3,006	0,159	0,241	0,660
	$\beta_6$	-0,103	0,130	-0,795	-0,007	0,004	-1,551	0,007	0,020	0,352
	$\beta_7$	-0,059	0,095	-0,619	0,003	0,003	1,149	0,029	0,010	2,801
	$\beta_9$	-0,467	0,558	-0,837	-0,007	0,016	-0,423	0,052	0,055	0,948

Lokasi	Par	IBU			NEONTAL DINI			NEONATAL LANJUT		
		Est	Se	Z	Est	Se	Z	Est	Se	Z
21	$\beta_0$	-7,776	1,875	-4,148	-3,654	0,676	-5,405	-3,926	1,453	-2,702
	$\beta_1$	0,026	0,022	1,196	0,010	0,008	1,297	-0,028	0,017	-1,669
	$\beta_2$	-0,007	0,012	-0,600	-0,033	0,005	-6,925	-0,004	0,011	-0,392
	$\beta_4$	0,026	0,044	0,586	0,083	0,016	5,051	0,047	0,035	1,348
	$\beta_6$	-0,004	0,003	-1,593	0,001	0,001	0,608	0,001	0,002	0,443
	$\beta_7$	-0,010	0,004	-2,938	0,000	0,001	-0,127	0,002	0,002	1,082
	$\beta_9$	-0,014	0,014	-0,998	0,012	0,005	2,308	0,004	0,011	0,342
22	$\beta_0$	-8,688	19,63	-0,443	-1,608	3,051	-0,527	-14,50	11,17	-1,298
	$\beta_1$	-0,018	0,206	-0,089	-0,014	0,036	-0,388	-0,055	0,157	-0,348
	$\beta_2$	0,057	0,085	0,674	-0,032	0,013	-2,446	0,099	0,117	0,843
	$\beta_4$	-0,013	0,230	-0,054	0,101	0,048	2,095	-0,134	0,170	-0,785
	$\beta_6$	-0,002	0,024	-0,076	0,000	0,005	0,007	0,019	0,015	1,253
	$\beta_7$	-0,034	0,047	-0,720	0,002	0,003	0,653	0,012	0,008	1,508
	$\beta_9$	-0,066	0,144	-0,457	0,007	0,017	0,437	0,100	0,072	1,385
23	$\beta_0$	-6,676	3,615	-1,847	-3,218	1,230	-2,615	-5,926	2,763	-2,145
	$\beta_1$	0,033	0,045	0,734	0,002	0,014	0,107	-0,017	0,042	-0,406
	$\beta_2$	-0,015	0,028	-0,545	-0,029	0,008	-3,728	0,013	0,033	0,389
	$\beta_4$	0,223	0,110	2,031	0,098	0,025	3,866	0,183	0,080	2,284
	$\beta_6$	-0,021	0,009	-2,411	-0,001	0,002	-0,503	-0,009	0,006	-1,404
	$\beta_7$	-0,001	0,005	-0,318	0,003	0,002	1,804	0,006	0,003	1,806
	$\beta_9$	-0,049	0,038	-1,289	0,013	0,009	1,446	-0,022	0,027	-0,835
24	$\beta_0$	-6,492	21,52	-0,302	-1,361	2,836	-0,480	-14,24	15,68	-0,908
	$\beta_1$	-0,079	0,218	-0,360	-0,018	0,032	-0,554	-0,085	0,184	-0,460
	$\beta_2$	0,091	0,069	1,313	-0,032	0,014	-2,329	0,135	0,111	1,217
	$\beta_4$	-0,070	0,353	-0,198	0,122	0,058	2,107	-0,018	0,266	-0,067
	$\beta_6$	-0,004	0,028	-0,135	-0,002	0,005	-0,530	0,014	0,023	0,594
	$\beta_7$	-0,029	0,042	-0,691	0,003	0,003	0,945	0,011	0,010	1,067
	$\beta_9$	-0,042	0,136	-0,307	0,015	0,017	0,858	0,049	0,096	0,509
25	$\beta_0$	-8,451	1,622	-5,211	-4,136	0,586	-7,062	-4,295	1,266	-3,393
	$\beta_1$	0,032	0,019	1,695	0,016	0,007	2,306	-0,021	0,015	-1,399
	$\beta_2$	-0,009	0,011	-0,806	-0,035	0,005	-7,716	-0,004	0,010	-0,412
	$\beta_4$	0,029	0,039	0,757	0,079	0,015	5,422	0,070	0,031	2,252
	$\beta_6$	-0,003	0,002	-1,456	0,001	0,001	1,593	0,000	0,002	-0,211
	$\beta_7$	-0,009	0,003	-2,760	0,000	0,001	0,138	0,001	0,002	0,472
	$\beta_9$	-0,007	0,013	-0,573	0,014	0,004	3,171	-0,007	0,010	-0,686

Lokasi	Par	IBU			NEONTAL DINI			NEONATAL LANJUT		
		Est	Se	Z	Est	Se	Z	Est	Se	Z
26	$\beta_0$	-41,22	19,38	-2,127	-6,741	1,512	-4,458	-24,11	6,280	-3,839
	$\beta_1$	0,187	0,134	1,395	0,021	0,019	1,104	-0,007	0,060	-0,113
	$\beta_2$	0,135	0,112	1,198	-0,026	0,018	-1,480	0,177	0,093	1,908
	$\beta_4$	-0,528	0,475	-1,111	0,056	0,052	1,077	-0,014	0,160	-0,088
	$\beta_6$	0,010	0,015	0,663	0,004	0,003	1,191	0,004	0,009	0,450
	$\beta_7$	0,015	0,022	0,684	0,011	0,005	2,009	0,002	0,015	0,150
	$\beta_9$	0,225	0,175	1,282	0,055	0,015	3,751	0,054	0,045	1,208
27	$\beta_0$	-6,236	3,178	-1,962	-4,502	0,916	-4,913	-5,422	2,748	-1,973
	$\beta_1$	-0,073	0,041	-1,787	0,002	0,011	0,135	-0,139	0,040	-3,493
	$\beta_2$	0,077	0,036	2,180	-0,020	0,009	-2,212	0,132	0,039	3,410
	$\beta_4$	0,136	0,106	1,281	0,090	0,030	3,046	0,231	0,084	2,764
	$\beta_6$	-0,017	0,005	-3,325	-0,001	0,002	-0,484	-0,014	0,004	-3,204
	$\beta_7$	0,000	0,008	-0,004	0,005	0,002	2,389	0,006	0,005	1,171
	$\beta_9$	-0,011	0,020	-0,555	0,028	0,008	3,746	-0,026	0,017	-1,575
28	$\beta_0$	-35,74	18,65	-1,917	-5,113	1,355	-3,773	-12,19	5,484	-2,222
	$\beta_1$	0,306	0,147	2,087	0,049	0,021	2,353	0,130	0,083	1,559
	$\beta_2$	-0,055	0,115	-0,475	-0,071	0,020	-3,526	-0,064	0,108	-0,593
	$\beta_4$	-0,379	0,535	-0,709	0,032	0,065	0,493	0,284	0,266	1,067
	$\beta_6$	0,017	0,014	1,203	0,007	0,003	2,106	0,002	0,010	0,214
	$\beta_7$	0,024	0,029	0,820	0,012	0,006	1,972	-0,042	0,032	-1,309
	$\beta_9$	0,187	0,159	1,181	0,043	0,015	2,817	-0,091	0,094	-0,965
29	$\beta_0$	-36,00	19,27	-1,869	-4,795	1,556	-3,082	-11,13	6,365	-1,749
	$\beta_1$	0,323	0,168	1,922	0,053	0,025	2,103	0,160	0,098	1,638
	$\beta_2$	-0,070	0,129	-0,544	-0,080	0,025	-3,221	-0,101	0,124	-0,808
	$\beta_4$	-0,406	0,552	-0,736	0,036	0,084	0,430	0,376	0,330	1,141
	$\beta_6$	0,019	0,017	1,122	0,007	0,004	1,637	0,002	0,013	0,195
	$\beta_7$	0,026	0,035	0,738	0,012	0,007	1,713	-0,056	0,038	-1,453
	$\beta_9$	0,183	0,173	1,058	0,042	0,020	2,161	-0,131	0,117	-1,115
30	$\beta_0$	-5,273	2,392	-2,205	-3,347	0,668	-5,011	-1,897	1,725	-1,100
	$\beta_1$	-0,068	0,031	-2,222	-0,005	0,008	-0,581	-0,105	0,022	-4,680
	$\beta_2$	0,060	0,023	2,552	-0,021	0,005	-4,219	0,055	0,018	3,069
	$\beta_4$	0,064	0,088	0,719	0,090	0,017	5,230	0,128	0,055	2,302
	$\beta_6$	-0,017	0,004	-4,473	-0,002	0,001	-2,084	-0,010	0,003	-3,655
	$\beta_7$	0,000	0,004	0,042	0,001	0,001	1,036	0,007	0,002	3,245
	$\beta_9$	0,006	0,017	0,320	0,015	0,005	3,060	-0,001	0,013	-0,104



Lokasi	Par	IBU			NEONTAL DINI			NEONATAL LANJUT		
		Est	Se	Z	Est	Se	Z	Est	Se	Z
31	$\beta_0$	-7,353	2,056	-3,577	-2,998	0,789	-3,801	-3,325	1,623	-2,048
	$\beta_1$	0,022	0,025	0,873	0,005	0,009	0,573	-0,034	0,020	-1,698
	$\beta_2$	-0,004	0,015	-0,257	-0,033	0,006	-5,987	-0,003	0,013	-0,221
	$\beta_4$	0,037	0,049	0,751	0,089	0,018	4,944	0,053	0,039	1,364
	$\beta_6$	-0,006	0,003	-1,905	-0,001	0,001	-0,390	0,000	0,002	-0,136
	$\beta_7$	-0,012	0,004	-3,233	-0,001	0,001	-1,091	0,001	0,002	0,644
	$\beta_9$	-0,027	0,016	-1,660	0,005	0,006	0,902	-0,002	0,012	-0,175
32	$\beta_0$	-7,623	3,890	-1,960	-1,935	1,294	-1,495	-4,849	2,879	-1,684
	$\beta_1$	0,031	0,042	0,742	-0,006	0,014	-0,382	-0,023	0,032	-0,735
	$\beta_2$	-0,012	0,017	-0,675	-0,034	0,007	-5,030	-0,004	0,016	-0,262
	$\beta_4$	0,039	0,068	0,571	0,094	0,023	4,177	0,035	0,051	0,689
	$\beta_6$	-0,008	0,005	-1,444	-0,001	0,002	-0,693	0,001	0,004	0,172
	$\beta_7$	-0,013	0,007	-1,744	0,000	0,001	-0,268	0,004	0,003	1,410
	$\beta_9$	-0,014	0,026	-0,556	0,005	0,008	0,635	0,024	0,018	1,318
33	$\beta_0$	-4,543	24,67	-0,184	-1,060	3,549	-0,299	-17,55	16,53	-1,062
	$\beta_1$	-0,069	0,258	-0,268	-0,019	0,044	-0,432	-0,032	0,199	-0,162
	$\beta_2$	0,070	0,085	0,818	-0,032	0,015	-2,160	0,097	0,107	0,908
	$\beta_4$	0,015	0,332	0,046	0,118	0,065	1,814	-0,163	0,255	-0,638
	$\beta_6$	-0,008	0,032	-0,251	-0,002	0,005	-0,353	0,022	0,023	0,985
	$\beta_7$	-0,041	0,057	-0,710	0,002	0,003	0,695	0,017	0,012	1,366
	$\beta_9$	-0,066	0,171	-0,384	0,007	0,018	0,370	0,137	0,107	1,283
34	$\beta_0$	-8,495	1,636	-5,192	-4,154	0,591	-7,028	-4,365	1,279	-3,414
	$\beta_1$	0,033	0,019	1,711	0,016	0,007	2,295	-0,021	0,015	-1,342
	$\beta_2$	-0,009	0,012	-0,817	-0,035	0,005	-7,643	-0,004	0,011	-0,399
	$\beta_4$	0,030	0,039	0,762	0,079	0,015	5,348	0,070	0,031	2,245
	$\beta_6$	-0,003	0,002	-1,432	0,001	0,001	1,635	0,000	0,002	-0,197
	$\beta_7$	-0,009	0,003	-2,701	0,000	0,001	0,197	0,001	0,002	0,467
	$\beta_9$	-0,007	0,013	-0,547	0,014	0,005	3,193	-0,007	0,010	-0,691
35	$\beta_0$	-8,730	1,712	-5,099	-4,279	0,618	-6,924	-4,651	1,342	-3,466
	$\beta_1$	0,036	0,020	1,763	0,017	0,007	2,351	-0,017	0,016	-1,075
	$\beta_2$	-0,010	0,012	-0,851	-0,035	0,005	-7,270	-0,004	0,011	-0,340
	$\beta_4$	0,031	0,041	0,773	0,077	0,015	5,006	0,075	0,033	2,301
	$\beta_6$	-0,003	0,002	-1,263	0,002	0,001	1,837	-0,001	0,002	-0,280
	$\beta_7$	-0,008	0,004	-2,368	0,000	0,001	0,405	0,001	0,002	0,327
	$\beta_9$	-0,005	0,013	-0,355	0,015	0,005	3,249	-0,009	0,010	-0,877



**LAMPIRAN 17 : Hasil Estimasi Parameter Kovariansi dan Nilai Statistik Uji  
Model GWMPR dengan Kovariansi Fungsi Variabel Bebas**

Lokasi	Par	Est	Se	Z
1	$\beta_0$	11,931	13,778	0,866
	$\beta_1$	-0,060	0,085	-0,707
	$\beta_2$	-0,120	0,119	-1,008
	$\beta_4$	0,449	0,423	1,062
	$\beta_6$	-0,022	0,021	-1,046
	$\beta_7$	-0,003	0,025	-0,106
	$\beta_9$	-0,154	0,108	-1,426
2	$\beta_0$	11,310	8,057	1,404
	$\beta_1$	-0,090	0,058	-1,547
	$\beta_2$	-0,084	0,047	-1,803
	$\beta_4$	0,247	0,160	1,542
	$\beta_6$	-0,016	0,010	-1,633
	$\beta_7$	0,000	0,010	-0,012
	$\beta_9$	-0,134	0,054	-2,462
3	$\beta_0$	-14,81	4,253	-3,483
	$\beta_1$	0,375	0,065	5,809
	$\beta_2$	-0,299	0,029	-10,29
	$\beta_4$	-0,068	0,122	-0,556
	$\beta_6$	0,023	0,008	2,848
	$\beta_7$	-0,017	0,006	-2,802
	$\beta_9$	-0,114	0,051	-2,245
4	$\beta_0$	9,241	25,105	0,368
	$\beta_1$	-0,038	0,166	-0,232
	$\beta_2$	-0,112	0,179	-0,627
	$\beta_4$	0,422	0,657	0,643
	$\beta_6$	-0,029	0,045	-0,653
	$\beta_7$	0,005	0,038	0,121
	$\beta_9$	-0,132	0,205	-0,645
5	$\beta_0$	-3,527	11,206	-0,315
	$\beta_1$	0,033	0,110	0,301
	$\beta_2$	-0,057	0,144	-0,393
	$\beta_4$	0,066	0,319	0,207
	$\beta_6$	-0,007	0,015	-0,491
	$\beta_7$	0,000	0,033	0,005
	$\beta_9$	-0,026	0,060	-0,443

Lokasi	Par	Est	Se	Z
6	$\beta_0$	232,42	318,82	0,729
	$\beta_1$	-1,341	1,798	-0,746
	$\beta_2$	-0,873	1,252	-0,698
	$\beta_4$	0,278	0,653	0,426
	$\beta_6$	-0,145	0,228	-0,635
	$\beta_7$	0,006	0,117	0,052
	$\beta_9$	-2,302	3,142	-0,733
7	$\beta_0$	9,362	39,490	0,237
	$\beta_1$	-0,078	0,278	-0,279
	$\beta_2$	-0,091	0,168	-0,546
	$\beta_4$	0,182	0,398	0,458
	$\beta_6$	-0,016	0,040	-0,404
	$\beta_7$	0,010	0,025	0,396
	$\beta_9$	-0,070	0,182	-0,383
8	$\beta_0$	-19,16	16,886	-1,135
	$\beta_1$	0,192	0,193	0,993
	$\beta_2$	-0,018	0,118	-0,149
	$\beta_4$	0,164	0,257	0,636
	$\beta_6$	-0,035	0,033	-1,050
	$\beta_7$	0,002	0,026	0,074
	$\beta_9$	-0,032	0,134	-0,237
9	$\beta_0$	234,90	527,90	0,445
	$\beta_1$	-6,593	14,471	-0,456
	$\beta_2$	4,409	9,860	0,447
	$\beta_4$	9,605	20,380	0,471
	$\beta_6$	-0,861	1,907	-0,451
	$\beta_7$	0,333	0,657	0,507
	$\beta_9$	-2,243	5,113	-0,439
10	$\beta_0$	36,281	113,02	0,321
	$\beta_1$	-0,242	0,907	-0,266
	$\beta_2$	-0,112	0,743	-0,151
	$\beta_4$	0,348	0,769	0,453
	$\beta_6$	-0,047	0,084	-0,564
	$\beta_7$	-0,008	0,089	-0,091
	$\beta_9$	-0,636	0,741	-0,858

Lokasi	Par	Est	Se	Z
11	$\beta_0$	-10,38	4,975	-2,086
	$\beta_1$	0,446	0,068	6,594
	$\beta_2$	-0,374	0,031	-12,12
	$\beta_4$	-0,293	0,120	-2,434
	$\beta_6$	0,019	0,008	2,234
	$\beta_7$	-0,030	0,005	-5,903
	$\beta_9$	-0,211	0,065	-3,247
12	$\beta_0$	-1,520	30,528	-0,050
	$\beta_1$	-0,330	0,577	-0,573
	$\beta_2$	0,332	0,476	0,697
	$\beta_4$	0,737	0,869	0,848
	$\beta_6$	-0,053	0,059	-0,903
	$\beta_7$	-0,005	0,036	-0,144
	$\beta_9$	-0,206	0,233	-0,885
13	$\beta_0$	254,63	594,54	0,428
	$\beta_1$	-7,149	16,290	-0,439
	$\beta_2$	4,792	11,094	0,432
	$\beta_4$	10,399	22,946	0,453
	$\beta_6$	-0,934	2,148	-0,435
	$\beta_7$	0,359	0,740	0,486
	$\beta_9$	-2,436	5,755	-0,423
14	$\beta_0$	31,091	31,304	0,993
	$\beta_1$	-0,296	0,241	-1,232
	$\beta_2$	-0,114	0,196	-0,583
	$\beta_4$	0,838	0,687	1,220
	$\beta_6$	-0,113	0,097	-1,168
	$\beta_7$	0,070	0,088	0,796
	$\beta_9$	-0,041	0,151	-0,274
15	$\beta_0$	70,519	104,26	0,676
	$\beta_1$	-0,305	0,783	-0,389
	$\beta_2$	-0,410	0,441	-0,930
	$\beta_4$	0,276	0,391	0,705
	$\beta_6$	-0,050	0,028	-1,782
	$\beta_7$	0,009	0,052	0,179
	$\beta_9$	-0,885	0,594	-1,491

Lokasi	Par	Est	Se	Z
16	$\beta_0$	-7,807	7,064	-1,105
	$\beta_1$	-0,157	0,079	-1,975
	$\beta_2$	0,148	0,105	1,413
	$\beta_4$	-0,325	0,288	-1,128
	$\beta_6$	0,010	0,014	0,706
	$\beta_7$	0,003	0,012	0,282
	$\beta_9$	0,103	0,089	1,154
17	$\beta_0$	324,58	794,83	0,408
	$\beta_1$	-9,088	21,768	-0,418
	$\beta_2$	6,117	14,817	0,413
	$\beta_4$	13,143	30,682	0,428
	$\beta_6$	-1,188	2,873	-0,414
	$\beta_7$	0,448	0,991	0,452
	$\beta_9$	-3,117	7,685	-0,406
18	$\beta_0$	-7,192	5,301	-1,357
	$\beta_1$	-0,188	0,060	-3,157
	$\beta_2$	0,166	0,076	2,190
	$\beta_4$	-0,418	0,222	-1,888
	$\beta_6$	0,014	0,009	1,582
	$\beta_7$	0,010	0,006	1,529
	$\beta_9$	0,126	0,062	2,052
19	$\beta_0$	371,21	971,75	0,382
	$\beta_1$	-10,37	26,604	-0,390
	$\beta_2$	6,992	18,103	0,386
	$\beta_4$	14,953	37,503	0,399
	$\beta_6$	-1,357	3,512	-0,387
	$\beta_7$	0,506	1,213	0,418
	$\beta_9$	-3,573	9,391	-0,380
20	$\beta_0$	-6,160	8,144	-0,756
	$\beta_1$	-0,180	0,080	-2,238
	$\beta_2$	0,149	0,107	1,385
	$\beta_4$	-0,355	0,291	-1,220
	$\beta_6$	0,013	0,012	1,081
	$\beta_7$	0,010	0,009	1,080
	$\beta_9$	0,114	0,080	1,426

Lokasi	Par	Est	Se	Z
21	$\beta_0$	320,32	817,35	0,392
	$\beta_1$	-8,950	22,370	-0,400
	$\beta_2$	6,021	15,224	0,396
	$\beta_4$	12,938	31,512	0,411
	$\beta_6$	-1,171	2,951	-0,397
	$\beta_7$	0,440	1,017	0,433
	$\beta_9$	-3,079	7,905	-0,390
22	$\beta_0$	7,157	55,629	0,129
	$\beta_1$	-0,033	0,537	-0,061
	$\beta_2$	-0,112	0,075	-1,481
	$\beta_4$	0,323	0,201	1,608
	$\beta_6$	-0,033	0,048	-0,690
	$\beta_7$	0,018	0,019	0,947
	$\beta_9$	-0,049	0,190	-0,258
23	$\beta_0$	-45,43	57,443	-0,791
	$\beta_1$	0,318	0,486	0,655
	$\beta_2$	-0,187	0,257	-0,728
	$\beta_4$	-1,532	2,002	-0,766
	$\beta_6$	0,165	0,219	0,752
	$\beta_7$	0,007	0,070	0,105
	$\beta_9$	0,575	0,814	0,707
24	$\beta_0$	-9,509	19,565	-0,486
	$\beta_1$	0,133	0,243	0,548
	$\beta_2$	-0,110	0,087	-1,260
	$\beta_4$	0,342	0,308	1,110
	$\beta_6$	-0,023	0,022	-1,019
	$\beta_7$	0,014	0,016	0,862
	$\beta_9$	-0,019	0,088	-0,214
25	$\beta_0$	201,42	405,39	0,497
	$\beta_1$	-5,635	11,135	-0,506
	$\beta_2$	3,747	7,596	0,493
	$\beta_4$	8,234	15,676	0,525
	$\beta_6$	-0,736	1,465	-0,502
	$\beta_7$	0,287	0,505	0,569
	$\beta_9$	-1,915	3,932	-0,487

Lokasi	Par	Est	Se	Z
26	$\beta_0$	16,684	14,40	1,158
	$\beta_1$	-0,057	0,165	-0,345
	$\beta_2$	-0,167	0,136	-1,223
	$\beta_4$	0,624	0,751	0,831
	$\beta_6$	-0,031	0,052	-0,599
	$\beta_7$	-0,012	0,050	-0,245
	$\beta_9$	-0,194	0,189	-1,027
27	$\beta_0$	-28,99	10,32	-2,809
	$\beta_1$	0,352	0,127	2,765
	$\beta_2$	-0,163	0,053	-3,114
	$\beta_4$	0,060	0,206	0,292
	$\beta_6$	0,022	0,015	1,471
	$\beta_7$	0,004	0,018	0,251
	$\beta_9$	0,015	0,088	0,166
28	$\beta_0$	-1,409	8,725	-0,162
	$\beta_1$	-0,145	0,080	-1,802
	$\beta_2$	0,087	0,081	1,072
	$\beta_4$	0,370	0,302	1,224
	$\beta_6$	-0,018	0,017	-1,050
	$\beta_7$	0,009	0,017	0,510
	$\beta_9$	-0,038	0,055	-0,695
29	$\beta_0$	-0,913	10,20	-0,089
	$\beta_1$	-0,155	0,089	-1,752
	$\beta_2$	0,095	0,096	0,983
	$\beta_4$	0,360	0,355	1,015
	$\beta_6$	-0,018	0,021	-0,871
	$\beta_7$	0,006	0,020	0,278
	$\beta_9$	-0,040	0,066	-0,607
30	$\beta_0$	-18,39	5,335	-3,447
	$\beta_1$	0,234	0,080	2,924
	$\beta_2$	-0,127	0,036	-3,517
	$\beta_4$	0,133	0,170	0,782
	$\beta_6$	0,010	0,011	0,908
	$\beta_7$	-0,007	0,006	-1,112
	$\beta_9$	-0,075	0,070	-1,064

Lokasi	Par	Est	Se	Z
31	$\beta_0$	355,45	645,66	0,551
	$\beta_1$	-1,741	3,054	-0,570
	$\beta_2$	-2,503	4,279	-0,585
	$\beta_4$	2,443	4,028	0,607
	$\beta_6$	-0,580	1,173	-0,495
	$\beta_7$	0,635	1,045	0,608
	$\beta_9$	0,352	0,632	0,557
32	$\beta_0$	92,849	87,382	1,063
	$\beta_1$	-0,622	0,738	-0,842
	$\beta_2$	-0,278	0,454	-0,613
	$\beta_4$	0,476	0,530	0,899
	$\beta_6$	-0,077	0,056	-1,379
	$\beta_7$	0,001	0,036	0,029
	$\beta_9$	-1,120	0,802	-1,397
33	$\beta_0$	4,702	49,692	0,095
	$\beta_1$	-0,020	0,467	-0,042
	$\beta_2$	-0,098	0,079	-1,243
	$\beta_4$	0,288	0,262	1,097
	$\beta_6$	-0,028	0,051	-0,554
	$\beta_7$	0,014	0,016	0,907
	$\beta_9$	-0,050	0,175	-0,287
34	$\beta_0$	195,24	389,25	0,502
	$\beta_1$	-5,457	10,697	-0,510
	$\beta_2$	3,624	7,299	0,497
	$\beta_4$	7,979	15,058	0,530
	$\beta_6$	-0,713	1,407	-0,507
	$\beta_7$	0,278	0,485	0,574
	$\beta_9$	-1,855	3,777	-0,491
35	$\beta_0$	169,08	312,13	0,542
	$\beta_1$	-4,705	8,609	-0,547
	$\beta_2$	3,103	5,887	0,527
	$\beta_4$	6,901	12,119	0,570
	$\beta_6$	-0,615	1,130	-0,545
	$\beta_7$	0,242	0,390	0,621
	$\beta_9$	-1,597	3,034	-0,527

## LAMPIRAN 18 : Uji Kesamaan Model 2 dan Model 4

Uji kesamaan model 2 dan model 4 digunakan untuk mengetahui apakah ada perbedaan model GWMPR dengan kovariansi merupakan fungsi dari variabel bebas (model 4) dengan model MPR dengan kovariansi merupakan fungsi dari variabel bebas (model 2). Pada penelitian ini digunakan *Young's Test*, dengan tahapan uji sebagai berikut :

- Formulasi Hipotesis

$$H_0 : \beta_{hl}(\mathbf{u}_i) = \beta_{hl}$$

$$H_1 : \text{paling sedikit ada satu } \beta_{hl}(\mathbf{u}_i) \neq \beta_{hl} ; h=0,1,2,3 ; l=0,1,2,4,6,7,9 ; i=1,2,\dots,35$$

- Tingkat Signifikan ( $\alpha$ ) = 0,05

- Statistik Uji

$$V = \frac{\sqrt{n} \left( \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n m_i \right)}{\sqrt{\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n (m_i - \bar{m})^2}} \sim N(0,1)$$

dimana

$$\begin{aligned} m_i &= \ln \left( \frac{f_2(\mathbf{y}_i | \mathbf{x}_i, \hat{\boldsymbol{\beta}})}{f_4(\mathbf{y}_i | \mathbf{x}_i, \hat{\boldsymbol{\beta}}(\mathbf{u}_i))} \right) \\ &= (\ln \hat{B}_i - \ln \hat{D}_i) - s_i (e^{\mathbf{x}_i^T \hat{\boldsymbol{\beta}}_0} - e^{\mathbf{x}_i^T \hat{\boldsymbol{\beta}}_0(\mathbf{u}_i)}) - \sum_{h=1}^p s_i (e^{\mathbf{x}_i^T \hat{\boldsymbol{\beta}}_h} - e^{\mathbf{x}_i^T \hat{\boldsymbol{\beta}}_h(\mathbf{u}_i)}) \end{aligned}$$

dengan,

$$\hat{B}_i = \sum_{v=0}^q \frac{(s_i e^{\mathbf{x}_i^T \hat{\boldsymbol{\beta}}_0})^v}{v!} \prod_{h=1}^p \frac{(s_i e^{\mathbf{x}_i^T \hat{\boldsymbol{\beta}}_h})^{y_{hi}-v}}{(y_{hi}-v)!} \text{ dan}$$

$$\hat{D}_i = \sum_{v=0}^q \frac{(s_i e^{\mathbf{x}_i^T \hat{\boldsymbol{\beta}}_0(\mathbf{u}_i)})^v}{v!} \prod_{h=1}^p \frac{(s_i e^{\mathbf{x}_i^T \hat{\boldsymbol{\beta}}_h(\mathbf{u}_i)})^{y_{hi}-v}}{(y_{hi}-v)!}$$

- Komputasi

Memperhatikan hasil estimasi Parameter model 2 dan model 4, maka diperoleh nilai  $m_i$  sebagai berikut :

$i$	$m_i$	$i$	$m_i$	$i$	$m_i$	$i$	$m_i$	$i$	$m_i$
1	-3.587	8	-7.119	15	-4.601	22	-2.891	29	-4.426
2	-1.229	9	0.004	16	-4.213	23	-1.703	30	0.535
3	-1.089	10	-2.773	17	-0.313	24	-1.970	31	-2.722
4	-2.148	11	1.226	18	-4.170	25	0.065	32	-0.620
5	-6.388	12	-6.343	19	-0.626	26	-3.092	33	-1.341
6	-0.195	13	0.060	20	-1.186	27	-5.974	34	0.005
7	-3.515	14	-0.028	21	-0.510	28	-4.790	35	0.066

$$V = \frac{\sqrt{35}(-2,217)}{\sqrt{\frac{1}{35}(172,710)}} = -5,905$$

- Daerah Kritis

$H_0$  ditolak jika  $|V| > Z_{0,025} = 1,96$

- Kesimpulan

Hasil komputasi  $V = -5,905$ , sehingga  $H_0$  ditolak. Hal itu berarti terdapat perbedaan antara model GWMPR dengan MPR untuk kovariansi merupakan fungsi dari variabel bebas.



## RIWAYAT HIDUP PENULIS

### I. IDENTITAS PRIBADI



1. Nama : Triyanto
2. Tempat/Tgl Lahir : Wonosari, 8 Mei 1972
3. Instansi : Universitas Sebelas Maret  
Surakarta
4. NIP : 197205081998021001
5. Alamat Rumah : Jelobo RT 12 RW 05  
Wonosari, Klaten
6. E-mail : [triyanto@fkip.uns.ac.id](mailto:triyanto@fkip.uns.ac.id)
7. Status sebagai Mahasiswa : Mahasiswa Program Doktor  
Jurusan Statistika ITS Surabaya
8. N RP : 1312301004
9. Jalur : Tugas Belajar dengan sumber dana BPPS
10. Tanggal Masuk : 2 September 2012
11. SK Kandidat Doktor : 1674/IT2.6/HK.00.01.PP/2013,  
Tanggal 16 Desember 2013

### II. RIWAYAT PENDIDIKAN

1. Magister Sains, Jurusan Statistika, FMIPA, Institut Teknologi Sepuluh Nopember Surabaya, Tahun 2002.
2. Sarjana Sains, Jurusan Matematika, Fakultas Teknik, Universitas Sebelas Maret Surakarta, Tahun 1995.
3. SMA Negeri Delanggu, Klaten, Tahun 1990.
4. SMP Negeri 1 Wonosari, Klaten, Tahun 1987.
5. SD Negeri 3 Jelobo, Wonosari, Klaten, Tahun 1984.

### III. RIWAYAT PUBLIKASI

1. Triyanto, Purhadi, Otok, B.W., dan Purnami SW. (2016), "Hypothesis Testing of Geographically Weighted Multivariate Poisson Regression", *Far East Journal of Mathematical Sciences*, Vol. 100, hal : 747-762.
2. Triyanto, Purhadi, Otok, B.W., dan Purnami SW. (2015), "Parameter Estimation of Geographically Weighted Multivariate Poisson Regression", *Applied Mathematical Sciences*, Vol. 9, hal : 4081-4093.
3. Triyanto, Purhadi, Otok, B.W., dan Purnami SW. (2015), "Estimasi Parameter pada Geographically Weighted Bivariate Poisson Regression dengan Kovariansi Merupakan Fungsi dari Variabel Bebas", *Proceeding Seminar Nasional Matematika dan Pendidikan Matematika di UNS Surakarta*, ISBN : 978-692-7048-61-4, hal : 105-111.

4. Triyanto, Purhadi, Otok, B.W., dan Purnami S.W. (2014), "Parameter Estimation of Multivariate Poisson Regression with Covariance is a Function of Independent Variables" *Proceeding International Conference on Statistics and Mathematics* di ITS Surabaya, ISSN : 2460-0237 , hal : 97-104.
5. Triyanto, Purhadi, Otok, B.W., dan Purnami S.W. (2014), "Pengujian Hipotesis pada Regresi Poisson Multivariate dengan Kovariansi merupakan Fungsi dari Variabel Bebas" *Proceeding Seminar Nasional Matematika, Statistika dan Komputasi* di UNS Surakarta, ISN : 2337-392X, hal : 533-543.

Surabaya, Januari 2017

Penulis



Triyanto